Cuprins

Notaţii

$\mathbb{N}$	–	mulţimea numerelor naturale
$\mathbb{N}^*$	–	mulţimea $\mathbb{N}\setminus\{0\}$
$\mathbb{R}$	–	mulţimea numerelor reale, $\mathbb{R}_+ = [0,\infty[$, $\mathbb{R}_+^* =]0,\infty[$
$\mathbb{R}^n$	–	spaţiul euclidian n–dimensional cu elementele $x = (x_1, x_2, , ..., x_n)$, produsul scalar $(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ şi norma $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$
$B(x,r)$	–	mulţimea $\{y \in X; \|y-x\| < r\}$
$\overset{0}{\Omega}$	–	interiorul mulţimii Ω
$\overline{\Omega}$	–	închiderea mulţimii Ω
$\partial\Omega$	–	frontiera mulţimii Ω
$C(\Omega)$	–	spaţiul funcţiilor continue pe Ω
$C^k(\Omega)$	–	spaţiul funcţiilor continuu diferenţiabile pe Ω până la ordinul k inclusiv
$\operatorname{supp}\varphi$	–	suportul funcţiei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definit prin $\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x : x \in \mathbb{R}^n,\ \varphi(x) \neq 0\}}$
$C_0^\infty(\Omega)$ (sau $\mathcal{D}(\Omega)$)	–	spaţiul funcţiilor infinit diferenţiabile pe Ω cu suportul compact în Ω
$u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$	–	derivata parţială a funcţiei u în raport cu variabila t
$\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$	–	gradientul funcţiei $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$	–	operatorul lui Laplace (laplaceanul)
$L^p(\Omega)$	–	mulţimea $\{u : \Omega \to \mathbb{R}$, măsurabilă, $\int_\Omega u^p dx < \infty\}$, $1 \le p < \infty$
$H^k(\Omega)$	–	spaţiul Sobolev $\{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ \|\alpha\| \le k\}$
$H_0^k(\Omega)$	–	închiderea lui $C_0^\infty(\Omega)$ în $H^k(\Omega)$
$\|u\|_X$	–	norma elementului u în spaţiul X
$L^2(0,T;X)$	–	spaţiul funcţiilor măsurabile $u : [0,T] \to X$ cu norma $\|u(t)\|_X$ de pătrat integrabil
$\forall$	–	cuantificator universal (oricare ar fi, pentru orice)
$:=$	–	$a := b$ înseamnă că prin definiţie a este egal cu b
$\blacksquare$	–	sfârşit de demonstraţie

Scurt istoric privind dezvoltarea ecuaţiilor diferenţiale şi a ecuaţiilor cu derivate parţiale

Multe probleme semnificative de fizică, chimie, inginerie cer în formularea lor matematică determinarea unei funcţii care, împreună cu derivatele sale, satisface o relaţie dată. Astfel de relaţii se numesc *ecuaţii diferenţiale*. Pentru studierea ecuaţiilor diferenţiale este necesară o clasificare a acestora. Clasificarea uzuală este cea legată de numărul variabilelor independente de care depinde funcţia necunoscută. Dacă funcţia necunoscută depinde de o singură variabilă independentă spunem, că avem de-a face cu o *ecuaţie diferenţială ordinară*.

În cazul în care funcţia necunoscută depinde de mai multe variabile independente şi în relaţia respectivă apar şi derivatele parţiale ale funcţiei necunoscute, relaţia se numeşte *ecuaţie cu derivate parţiale*. În mod curent, în locul denumirii de ecuaţie diferenţială ordinară se foloseşte cea de ecuaţie diferenţială.

Denumirea de ecuaţie diferenţială a fost folosită prima dată de G.W. Leibniz (1646–1716) în 1676 într-o accepţiune apropiată de cea de azi. Dezvoltarea ecuaţiilor diferenţiale a fost în strânsă legătură cu dezvoltarea integralei. Au fost identificate clase de ecuaţii diferenţiale rezolvabile prin cuadraturi (integrări). Printre matematicienii care au adus contribuţii remarcabile la dezvoltarea ecuaţiilor diferenţiale se numără Isac Newton (1642–1727), precum şi membrii celebrei familii (de matematicieni) Bernoulli între care remarcăm pe Jakob Bernoulli (1654–1705), Johann Bernoulli (1667–1748) şi Daniel Bernoulli (1700–1782). Urmează J. Riccati (1776–1754), L. Euler (1707–1783), J. Lagrange (1736–1813). Secolul al XIX-lea este caracterizat de cercetări în problema existenţei, unicităţii şi comportării soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale.

A. Cauchy (1789–1857), R. Lipschitz (1832–1903) şi G. Peano (1858–1932) au impus metoda liniilor poligonale (utilizată anterior şi de Euler) ca metodă eficientă de demonstrare a existenţei locale a soluţiei unei ecuaţii diferenţiale cu condiţii iniţiale. Primele cercetări asupra ecuaţiilor diferenţiale au vizat existenţa soluţiilor (eventual determinarea explicită a acestora atunci când acest lucru este posibil) sau aproximarea acestora.

În partea a doua a secolului al XIX-lea s-au pus bazele teoriei moderne a stabilităţii prin lucrările matematicianului rus A.M. Liapunov (1857–1918) care, în teza sa de doctorat susţinută în 1892, a definit principalele concepte de stabilitate.

Contribuţii anterioare în această direcţie au avut H. Poincaré (1854–1912) şi J.C. Maxwell (1831–1879) în studiul stabilităţii mişcării corpurilor cereşti.

Cam acestea sunt elementele care sunt cuprinse în teoria clasică a ecuaţiilor diferenţiale. Secolul al XX-lea a însemnat un salt calitativ în abordarea ecuaţiilor diferenţiale prin introducerea unor metode noi precum cea a gradului topologic, teoria bifurcaţiei etc. De asemenea, s-a extins studiul ecuaţiilor diferenţiale la spaţii infinit dimensionale unde s-au obţinut rezultate notabile.

Cercetând problema coardei vibrante, J.E. D'Alembert (1717–1753) a obţinut în 1747 prima ecuaţie cu derivate parţiale. Ulterior, L. Euler a lărgit clasa ecuaţiilor cu derivate parţiale şi a introdus noţiunea de unicitate a soluţiei unei ecuaţii. Marii matematicieni ai vremii, între care D. Bernoulli, J. Lagrange, P. Laplace (1749–1827)

şi alţii, au fost preocupaţi de acest domeniu al matematicii care începea să prindă contur.

J. d'Alembert, L. Euler şi D. Bernoulli au fost primii care, pornind de la câteva probleme concrete, au avut ideea căutării soluţiei unei ecuaţii cu derivate parţiale sub forma unei serii trigonometrice. Această idee a fost luată şi perfecţionată de J. Fourier (1758–1830), care a folosit-o pentru rezolvarea ecuaţiei propagării căldurii.

S-a conturat o ramură nouă a analizei matematice: *teoria seriilor Fourier.*

Un alt moment important în dezvoltarea ecuaţiilor cu derivate parţiale îl constituie observarea de către P. Laplace (1749–1827) a faptului că potenţialul interacţiunii dintre două mase satisface o relaţie cunoscută azi sub numele de *ecuaţia lui Laplace.* S-a constatat că fenomene de aceeaşi natură au loc în electrostatică şi teoria magnetismului. Acest fapt a dus la crearea de către G. Green (1793–1841), K.F. Gauss (1777–1855) şi S.D. Poisson (1781–1840) a *teoriei potenţialului.* Secolul al XIX-lea a fost marcat de descoperiri fundamentale în domeniul analizei matematice prin rezultate datorate lui A. Cauchy şi mai târziu lui K. Weierstrass (1815–1897).

Aceste rezultate şi-au pus amprenta şi asupra ecuaţiilor diferenţiale şi cu derivate parţiale. A fost fundamentată *teoria soluţiilor analitice* de către A. Cauchy şi S. Kovalevsky (1850–1891). Lucrările lui V. Volterra (1860–1940) şi I. Fredholm (1866–1927) au dus la crearea *teoriei ecuaţiilor integrale* care a facilitat demonstrarea existenţei soluţiilor pentru probleme la limită în special în teoria potenţialului.

În 1904, D. Hilbert (1862–1943) a deschis câmpul *soluţiilor slabe* pentru ecuaţii cu derivate parţiale construind aceste soluţii pentru problema Dirichlet ca minimizanţi ai integralei Dirichlet asociate. Evident că aceste soluţii nu sunt soluţii clasice pentru problema Dirichlet. În această lucrare, Hilbert a formulat un program de extindere a conceptului de soluţie care să includă problemele variaţionale ce nu au soluţii clasice.

Progresele realizate la mijlocul secolului al XX-lea de analiza funcţională şi teoria distribuţiilor au condus la noi metode de investigare a ecuaţiilor cu derivate parţiale. Rezultate notabile au fost obţinute de J. Schauder (1899–1943), S. Sobolev (1908–1980), L. Schwartz, J. Leray.

În ultimul timp un impact deosebit în studiul ecuaţiilor diferenţiale şi cu derivate parţiale îl are tehnica de calcul din ce în ce mai performantă care oferă rezultate de aproximare a soluţiilor, foarte bune din punct de vedere practic. În acest fel, cercetările teoretice de existenţă, comportare în raport cu datele etc. sunt completate de rezultate numerice foarte utile.

Capitolul 1

Capitol introductiv

Studiul fenomenelor naturii i-a condus pe oamenii de ştiinţă la crearea unor modele matematice care să cuprindă într-o formulare abstractă principalele caracteristici ale acestora. Pentru fenomenele evolutive cel mai potrivit model s-a dovedit acela dat sub forma unei ecuaţii (sau sistem de ecuaţii) diferenţiale.

Într-o formulare aproximativă prin *ecuaţie diferenţială* se înţelege o ecuaţie în care necunoscuta este o funcţie de una sau mai multe variabile care apare (în ecuaţie) alături de derivatele sale până la un anumit ordin. Ordinul maxim al acestor derivate se numeşte *ordinul ecuaţiei*. Studiul ecuaţiilor diferenţiale într-o manieră sistematică beneficiază de o clasificare a acestora. Cea mai uzuală clasificare este cea dată de numărul de variabile independente de care depinde funcţia necunoscută. În cazul în care funcţia necunoscută depinde de mai multe variabile independente, iar în ecuaţie apar efectiv derivatele funcţiei în raport cu aceste variabile, ecuaţia se numeşte *cu derivate parţiale*. Dacă însă funcţia necunoscută depinde de o singură variabilă, ecuaţia se numeşte *ordinară*. Probabil cel mai cunoscut model de ecuaţie diferenţială ordinară este cel dat de *legea lui Newton*

$$mx''(t) = F(t, x(t), x'(t)) \tag{0.1}$$

care exprimă legea de mişcare a unui punct material de masă m asupra căruia acţionează o forţă F. În relaţia de mai sus $x(t)$, $x'(t))$ şi $x''(t)$ reprezintă poziţia, viteza şi respectiv acceleraţia punctului material la momentul t.

Dacă, de exemplu, F este forţa de gravitaţie, atunci relaţia (0.1) se scrie sub forma

$$mx'' = -mg \tag{0.2}$$

care, prin integrare, conduce la

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2,$$

C_1 şi C_2 fiind constante oarecare.

Aşadar, problema determinării legii de mişcare a unui punct material sub acţiunea unei forţe (care depinde de poziţia şi viteza punctului material) revine la aflarea unei funcţii care verifică o ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea de forma

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)). \tag{0.3}$$

Forma generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n este

$$F(t, x(t), x'(t), ..., x^{(n)}t) = 0. \tag{0.4}$$

În anumite condiţii, ecuaţia (0.4) se poate scrie sub forma echivalentă

$$x^{(n)} = f(t, x, x', ..., x^{(n-1)}) \tag{0.5}$$

numită şi *forma normală*. Precizăm că pentru simplificarea expunerii, atunci când nu este pericol de confuzie, se renunţă la scrierea argumentului funcţiei necunoscute.

Prin *soluţie* a ecuaţiei diferenţiale ordinare (5) pe intervalul $(a, b) \subset \mathbb{R}$ înţelegem o funcţie $x(\cdot)$ pentru care există derivatele $x', x'', ..., x^{(n)}$ şi verifică relaţia (0.5) pe (a, b), adică

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), ..., x^{(n-1)}(t)),\ \forall\, t \in (a, b).$$

Mulţimea soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale se numeşte *soluţie generală*.

Pentru a individualiza una dintre soluţii, sunt necesare informaţii suplimentare despre aceasta. Această problemă legată de condiţiile care asigură existenţa şi unicitatea soluţiei unei ecuaţii diferenţiale ordinare a fost studiată pentru prima dată de matematicianul francez Augustin Cauchy (1789–1857) la începutul secolului al XIX-lea. Odată stabilit un rezultat de existenţă şi unicitate pentru o ecuaţie diferenţială, rămâne problema determinării efective a soluţiei. S-a demonstrat că de cele mai multe ori acest lucru este imposibil – clasa ecuaţiilor diferenţiale rezolvabile prin cuadraturi (integrări) fiind foarte restrânsă. Tehnica de calcul foarte performantă permite aproximarea soluţiei unei ecuaţii diferenţiale cu o acurateţe suficient de bună, diminuând astfel interesul pentru găsirea soluţiei exacte.

Totuşi, exprimarea soluţiei printr-o formulă explicită rămâne un fapt incitant şi util, motiv pentru care am şi introdus un paragraf ce conţine câteva tipuri de ecuaţii diferenţiale rezolvabile prin cuadraturi.

1.1 Ecuaţii diferenţiale rezolvabile prin metode elementare

În acest capitol vom prezenta câteva tipuri clasice de ecuaţii diferenţiale ale căror soluţii pot fi determinate prin operaţii de integrare.

Ecuaţii cu variabile separabile

O ecuaţie de forma

$$x' = f(t)g(x) \tag{1.1}$$

unde $f :]t_1, t_2[\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ şi $g :]x_1, x_2[\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt funcţii continue cu $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in]x_1, x_2[$ se numeşte *ecuaţie cu variabile separabile.*

Scriind ecuaţia (1.1) sub forma echivalentă

$$\frac{dx}{g(x)} = f(t)\, dt \tag{1.2}$$

şi integrând (1.2) de la t_0 la t ($t_0, t \in]t_1, t_2[$) obţinem

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{d\tau}{g(\tau)} = \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds.$$

Dacă notăm $x(t_0) = x_0$ şi

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\tau}{g(\tau)}, \quad x \in]x_1, x_2[,$$

având în vedere că ipotezele asupra lui g implică faptul că G este inversabilă pe mulţimea $G(]x_1, x_2[)$ rezultă că soluţia x a ecuaţiei (1.1) este dată de

$$x(t) = G^{-1}\left(\int_{t_0}^{t} f(s)ds\right),\ t \in]t_1, t_2[. \tag{1.3}$$

Observaţie. Este evident că în (1.3) soluţia $x(\cdot)$ este definită pentru valorile lui t pentru care $\displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s)ds$ se află în domeniul de definiţie al funcţiei G^{-1}.

Exemplu. Să se integreze ecuaţia

$$(e^t + 1)^3 e^{-t} dx + (e^x + 1)^2 e^{-x} dt = 0.$$

Soluţie. Este o ecuaţie cu variabile separabile de forma $x'=f(t)g(x)$ unde $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = -e^t(e^t+1)^3$, $g(x) = (e^x+1)^2 e^{-x}$ care se rezolvă obţinându-se relaţia

$$2(e^x+1)^{-1} + (e^t+1)^{-1} = C$$

de unde

$$x(t) = \ln\left(\frac{2}{C-(e^t+1)^{-2}} - 1\right).$$

Ecuaţii omogene

Ecuaţia

$$x' = h\left(\frac{x}{t}\right) \tag{1.4}$$

se numeşte *ecuaţie omogenă* deoarece funcţia $f(t,x) := h\left(\dfrac{x}{t}\right)$ este omogenă de gradul zero. Dacă presupunem că $h(u) \neq u$ pe domeniul său de definiţie, atunci, făcând substituţia $ut = x$, ecuaţia (1.4) devine

$$u' \equiv \frac{1}{t}[h(u) - u]$$

adică o ecuaţie cu variabile separabile care se tratează după modelul anterior.

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia

$$x' = \frac{t^2 + x^2}{tx}\cdot$$

Soluţie. Ecuaţia se mai scrie sub forma

$$x' = \frac{t}{x} + \frac{x}{t}$$

şi făcând substituţia $ut = x$ devine

$$u\,du = \frac{dt}{t}$$

de unde prin integrare găsim

$$\frac{1}{2}u^2 - \ln|t| = \frac{1}{2}C,$$

apoi, revenind la substituţia făcută, se obţine

$$x^2 = t^2 \ln t^2 + Ct^2.$$

Ecuaţii liniare

Ecuaţiile liniare sunt de forma

$$x' = a(t)x + b(t) \tag{1.5}$$

unde $a, b : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt funcţii continue şi reprezintă o clasă importantă de ecuaţii pentru care soluţiile pot fi găsite prin cuadraturi.

Dacă $b = 0$, ecuaţia (1.5) este cu variabile separabile şi are soluţia

$$x(t) = Ce^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}, \tag{1.6}$$

unde $t_0, t \in I$ şi $C = x(t_0)$.

Pentru determinarea soluţiei în cazul general ($b \neq 0$) vom folosi metoda cunoscută sub numele de "variaţia constantelor", ce constă în înlocuirea constantei C în (1.6) cu o cantitate variabilă.

În cazul nostru, căutăm soluţia ecuaţiei (1.5) sub forma

$$x(t) = \varphi(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$$

de unde rezultă că φ este o funcţie derivabilă şi avem:

$$\varphi'(t) = x'(t)e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} - x(t)a(t)e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}.$$

Deoarece am presupus că x este soluţie a ecuaţiei (1.5), rezultă

$$\varphi'(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}b(t)$$

de unde deducem

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau}b(s).$$

Dar $\varphi(t_0) = x(t_0)$ şi $x(t) = \varphi(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$ de unde rezultă

$$x(t) = x(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} + \int_{t_0}^{t} b(s)e^{\int_{s}^{t} a(\tau)d\tau}ds. \tag{1.7}$$

Exemplu. Să se integreze ecuaţia

$$x' = -2tx + e^{-t^2}.$$

Aceasta este o ecuaţie liniară cu $a(t) = -2t$, $b(t) = e^{-t^2}$. Aplicând formula (1.7) găsim

$$x(t) = x(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} 2\tau\, d\tau} + \int_{t_0}^{t} e^{-s^2} e^{-\int_s^t 2\tau\, d\tau} ds$$

unde $t_0, t \in \mathbb{R}$, sau

$$x(t) = e^{-t^2}(t + C)$$

unde $C = e^{t_0^2} x(t_0) - t_0$.

Ecuaţii de tip Bernoulli

Ecuaţia

$$x' = a(t)x + b(t)x^{\alpha},$$

unde $a, b : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt funcţii continue, iar $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$, se numeşte *ecuaţie de tip Bernoulli*.

Prin substituirea $y = x^{1-\alpha}$ această ecuaţie se transformă în ecuaţie liniară

$$y'(t) = -(\alpha - 1)[a(t)y(t) + b(t)].$$

După rezolvarea acestei ecuaţii se revine la substituţie şi se obţine soluţia ecuaţiei iniţiale.

Exemplu. Ecuaţia diferenţială

$$x' = -\frac{1}{t}x + \frac{x^2}{t^2}, \quad x, t \neq 0$$

este de tip Bernoulli cu $a(t) = -\dfrac{1}{t}$, $b(t) = \dfrac{1}{t^2}$, $\alpha = 2$. Prin substituţia $y = x^{-1}$ obţinem ecuaţia

$$y' = \frac{1}{t}y - \frac{1}{t^2},$$

care are soluţia generală $y = \dfrac{2Ct^2 + 1}{2t}$, $C \in \mathbb{R}$ şi deci soluţia ecuaţiei iniţiale este

$$x = \frac{2t}{2Ct^2 + 1}.$$

Ecuaţii de tip Riccati

Ecuaţia diferenţială

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t), \tag{1.8}$$

unde $a, b, c : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt funcţii continue, se numeşte *ecuaţie de tip Riccati*.

Facem menţiunea că în general o astfel de ecuaţie nu poate fi rezolvată prin cuadraturi afară de cazul când, printr-un mijloc oarecare, se cunoaşte o soluţie particulară a sa.

Într-adevăr, dacă φ este o soluţie paticulară a ecuaţiei (1.8), iar x o soluţie oarecare a sa, atunci $y = x - \varphi$ satisface ecuaţia Bernoulli ($\alpha = 2$)

$$y' = [b(t) + 2a(t)\varphi(t)]y + a(t)y^2.$$

Deci, funcţia y poate fi obţinută cu ajutorul ecuaţiei liniare asociate de unde va rezulta soluţia generală a ecuaţiei (1.8), $x = y + \varphi$.

Exemplu. Ecuaţia

$$x' = -x^2 - \frac{1}{t}x + \frac{4}{t^2}$$

este de tip Riccati cu $a = -1$, $b = -\dfrac{1}{t}$, $c = \dfrac{4}{t^2}$ şi are soluţia particulară $\varphi = \dfrac{2}{t}\cdot$

Substituţia $x = y + \dfrac{2}{t}$ transformă ecuaţia iniţială într-o ecuaţie de tip Bernoulli

$$y' = -\frac{5}{t}y - y^2,$$

care, la rândul său prin schimbarea de variabile $z = \dfrac{1}{y}$, se transformă în ecuaţie liniară

$$z' = \frac{5}{t}z + 1.$$

Soluţiile succesive ale acestor ecuaţii sunt:

$$z = \frac{Ct^5 - t}{4},\ y = \frac{4}{Ct^5 - t},\ x = \frac{2}{t} + \frac{4}{Ct^5 - t}\cdot$$

Ecuaţii cu diferenţiale totale exacte

Fie ecuaţia diferenţială

$$x' = \frac{g(t,x)}{h(t,x)} \tag{1.9}$$

unde $g, h : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt două funcţii continue pe mulţimea deschisă Ω iar $h \neq 0$ în Ω. Spunem că ecuaţia (1.9) este cu diferenţială exactă dacă există $F \in C^1(\Omega)$ astfel încât

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x) = -g(t,x), \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(t,x) = h(t,x). \end{cases} \quad (t,x) \in \Omega$$

În aceste condiţii, ecuaţia (1.9) se scrie sub forma

$$dF(t, x(t)) = 0,$$

de unde rezultă că orice soluţie a ecuaţiei (1.9) verifică egalitatea

$$F(t, x(t)) = C, \tag{1.10}$$

C fiind o constantă reală. Are loc şi rezultatul reciproc: pentru orice constantă reală C, formula (1.10) defineşte (conform teoremei funcţiilor implicite, deoarece $\dfrac{\partial F}{\partial x} = h \neq 0$ pe Ω) o funcţie $x = x(t)$ care pe un anumit interval este soluţie a ecuaţiei (1.9). Se pune întrebarea: cum putem identifica ecuaţiile care sunt cu diferenţiale exacte iar atunci când au această proprietate cum putem determina funcţia F?

Pentru aceasta dăm, fără demonstraţie, următorul rezultat.

Teoremă 1.1. *Dacă Ω este un domeniu simplu conex şi $\dfrac{\partial h}{\partial t}, \dfrac{\partial g}{\partial x} \in C^1(\Omega)$, atunci condiţia necesară şi suficientă pentru ca ecuaţia* (1.9) *să fie cu diferenţială exactă este ca*

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t,x) = -\frac{\partial g}{\partial x}(t,x) \tag{1.11}$$

pentru orice $(t,x) \in \Omega$. În aceste condiţii, funcţia F este dată de

$$F(t,x) = -\int_{t_0}^{t} g(s,x)ds + \int_{x_0}^{x} h(t_0,\xi)d\xi = -\int_{t_0}^{t} g(s,x_0)ds + \int_{x_0}^{x} h(t,\xi)d\xi \tag{1.12}$$

unde (t_0, x_0) este un punct arbitrar în Ω.

Factor integrant

În unele cazuri, o ecuaţie de forma

$$h(t,x)dx - g(t,x)dt = 0 \tag{1.13}$$

care nu este cu diferenţială exactă poate fi adusă la această formă prin înmulţirea cu o funcţie $\rho(t,x)$, $\rho \in C^1(\Omega)$, $\rho \neq 0$, $(t,x) \in \Omega$, funcţie care mai poartă denumirea de *factor integrant*. Presupunând că o asemenea funcţie există, din teorema anterioară rezultă că ea satisface relaţia

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho g)}{\partial x}$$

sau

$$h\frac{\partial \rho}{\partial t} + g\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t}\right), \quad (t,x) \in \Omega. \tag{1.14}$$

Aşadar, dacă există o funcţie ρ care satisface (1.14), atunci prin înmulţirea cu ρ a ecuaţiei (1.13) (sau (1.9)), aceasta este redusă la o ecuaţie cu diferenţială exactă.

Prezentăm două situaţii în care funcţia ρ poate fi determinată:

(i) Presupunem că expresia

$$\frac{1}{h}\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t}\right) = \varphi(t) \text{ nu depinde de } x.$$

Atunci, putem determina funcţia $\rho = \rho(t)$ (independentă de x) ca soluţie a ecuaţiei

$$\rho' = \varphi(t)\rho.$$

(ii) Presupunem că expresia

$$\frac{1}{g}\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t}\right) = \psi(x) \text{ nu depinde de } t.$$

Atunci, putem determina funcţia $\rho = \rho(x)$ (independentă de t) ca soluţie a ecuaţiei

$$\rho' = \psi(x)\rho.$$

Exemplu. Fie ecuaţia diferenţială

$$x' = \frac{2(tx - x^3)}{6tx^2 - t^2}.$$

Această ecuaţie este de forma (1.9) cu $g(t,x) = 2(tx - x^3)$, $h(t,x) = = 6tx^2 - t^2$ care verifică relaţia (1.11) deci există funcţia F dată de formula (1.12)

$$\begin{aligned} F(t,x) &= 2\int_{t_0}^{t}(sx - x^3)ds + \int_{x_0}^{x}(t_0^2 - 6t_0\xi^2)d\xi = \\ &= t^2x - 2tx^3 - t_0^2x_0 + 2t_0x_0^3 \end{aligned}$$

iar soluţia ecuaţiei este dată sub formă implicită

$$t^2x - 2tx^3 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ecuaţii de tip Lagrange, Clairaut. Metoda parametrului

Ecuaţia de forma

$$x(t) = t\varphi(x'(t)) + \psi(x'(t)) \tag{1.15}$$

unde $\varphi, \psi \in C^1(I)$ ($\varphi(r) \neq r$ pentru orice $r \in \mathbb{R}$), I fiind un interval al axei reale se numeşte *ecuaţie de tip Lagrange.* Dacă $\varphi(x') = x'$, ecuaţia (1.15) este *de tip Clairaut.*

Pentru integrarea acestor tipuri de ecuaţii se foloseşte aşa numita *metodă a parametrului* care constă în următoarele:

Se notează în ecuaţia diferenţială (1.15) $x' = p$ şi se diferenţiază ecuaţia. Se obţine în acest fel o ecuaţie diferenţială liniară în care luăm pe t ca funcţie şi p ca variabilă. În urma integrării, găsim soluţia generală a ecuaţiei (1.15), în forma parametrică

$$\begin{cases} t = f(p, C) \\ x = g(p). \end{cases} \tag{1.16}$$

Relaţiile (1.16) dau reprezentarea parametrică a soluţiei generale a ecuaţiei (1.15).

În cazul ecuaţiei Clairaut, soluţia este dată de o familie de drepte a cărei înfăşurătoare este soluţia singulară a ecuaţiei.

Prin înfăşurătoarea unei familii de curbe se înţelege o curbă care, în fiecare punct al său, este tangentă la una din curbele familiei date şi diferă de acea curbă în orice vecinătate a punctului respectiv.

Exemplul 1.1. Ecuaţia

$$x(t) = -2tx'(t) - x'(t)^2$$

este de forma (1.15) cu $\varphi(x') = -2x'$, $\psi(x') = -x'^2$, deci este o ecuaţie de tip Lagrange.

Notăm $x' = p$ şi ecuaţia devine

$$x = -2tp - p^2$$

şi diferenţiind ambii membri ai ecuaţiei (ţinând cont că $x' = p$)

$$3p = -2t\frac{dp}{dt} - 2p\frac{dp}{dt}$$

sau

$$\frac{dt}{dp} = -\frac{2t}{3p} - \frac{2}{3}$$

care este o ecuaţie liniară în t ca funcţie de p şi are soluţia

$$t = Cp^{-\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}p,$$

de unde rezultă soluţia generală a ecuaţiei în forma parametrică

$$\begin{cases} t = Cp^{-\frac{2}{3}} - \dfrac{2}{5}p \\ x = -\dfrac{p^2}{5} - 2Cp^{\frac{1}{3}}. \end{cases}$$

Exemplul 1.2. Ecuaţia

$$x(t) = tx'(t) + \frac{1}{2}x'(t)^2,$$

este de tip Clairaut cu $\psi(x') = \dfrac{1}{2}x'^2$. Notând $x' = p$, ecuaţia devine (după diferenţiere)

$$p'(p + t) = 0$$

care conduce la soluţia generală

$$x = tC + \frac{1}{2}C^2, \quad C \in \mathbb{R}$$

şi la soluţia singulară

$$x = -\frac{1}{2}t^2.$$

Micşorarea ordinului unei ecuaţii diferenţiale

Prezentăm două clase de ecuaţii diferenţiale de ordin superior care pot fi transformate în ecuaţii de ordin strict mai mic.

Ecuaţia de forma

$$F(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, ..., x^{(n)}) = 0 \quad (0 < k < n) \tag{1.17}$$

se transformă prin substituţia $y = x^{(k)}$ în ecuaţia

$$F(t, y, y', ..., y^{(n-k)}) = 0. \tag{1.18}$$

Dacă ecuaţia (1.18) se poate rezolva, atunci, revenind la substituţia făcută, ecuaţia (1.17) se rezolvă în urma a "k" integrări succesive.

Ecuaţiile de forma

$$F(x, x', ..., x^{(n)}) = 0$$

îşi reduc ordinul cu o unitate dacă facem substituţia $p = x'$ şi considerăm p, noua funcţie necunoscută de variabilă x.

În acest fel avem:

$$x'' = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dx}\,\frac{dx}{dt} = \frac{dp}{dx} \cdot p \quad \text{ş.a.m.d.}$$

Exemplu. Să se integreze ecuaţia

$$tx'' + x' = 4t.$$

Soluţie. Notăm $x' = y$ şi obţinem ecuaţia

$$ty' + y = 4t$$

care este liniară şi are soluţia $y = 2t + \dfrac{C_1}{2t}$ şi, revenind la substituţie, găsim $x = t^2 + C_1 \ln t + C_2$.

Ecuaţii de tip Euler

O ecuaţie diferenţială de forma

$$t^n x^{(n)} + a_1 t^{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} t x' + a_n x = f(t) \tag{1.19}$$

unde $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$, iar $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ se numeşte *ecuaţie de tip Euler.*

Cu ajutorul substituţiilor

$$\begin{cases} t = e^s \\ x(t) = y(s) \end{cases}$$

pentru $t \in \mathbb{R}_+^*$ şi $s \in \mathbb{R}$, ecuaţia (1.19) devine ecuaţie liniară cu coeficienţi constanţi de ordin n în necunoscuta y şi variabila s. Acest lucru se vede imediat din calculul diferenţialelor în (1.19)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \frac{dy}{ds} \cdot \frac{1}{t} = e^{-s}\,\frac{dy}{ds}$$

apoi în mod recurent găsim că

$$\frac{d^k x}{dt^k} = e^{-ks}\left(C_1 \frac{dy}{ds} + C_2 \frac{dy^2}{ds^2} + \cdots + C_k \frac{d^k y}{ds^k}\right), \quad k = 2, 3, ..., n.$$

Exemplu. Să se rezolve problema

$$\begin{cases} t^2 x'' - 2tx' + 2x = 2 \\ x(1) = x'(1) = 1. \end{cases}$$

Soluţie. Făcând substituţia

$$\begin{cases} t = e^s \\ x(t) = y(s), \end{cases}$$

ecuaţia devine

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 2 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

care are soluţia $y(s) = e^{2s} - e^s + 1$, şi, revenind la ecuaţia iniţială, aceasta are soluţia $x = t^2 - t + 1$.

Rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale cu ajutorul seriilor de puteri

În cele ce urmează, vom prezenta o metodă care constă în obţinerea soluţiei unei probleme Cauchy ca sumă a unei serii de puteri. Astfel de soluţii se mai numesc *analitice*. Fără a intra în detalii (pentru cei interesaţi recomandăm [49]), precizăm faptul că dacă funcţia f este analitică pe domeniul său de definiţie, atunci *problema Cauchy* asociată (cu x_0 din domeniul lui f)

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

are o soluţie analitică.

În continuare prezentăm, pentru ilustrare, trei probleme rezolvate pe această cale.

Metoda coeficienţilor nedeterminaţi. Metoda este eficientă mai ales pentru ecuaţii diferenţiale liniare şi constă în căutarea unei soluţii de forma

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (t - t_0)^n. \tag{1.20}$$

Înlocuind x în ecuaţie, prin identificarea coeficienţilor puterilor egale ale lui t, rezultă o relaţie de recurenţă între aceştia.

Exemplul 1. Să se rezolve ecuaţia diferenţială

$$x'' + tx' + x = 0. \tag{1.21}$$

Căutând o soluţie de forma (1.20) cu $t_0 = 0$ şi înlocuind-o în ecuaţia (1.21), obţinem relaţia:

$$\begin{gathered}(C_0 + 2C_2) + t(2C_1 + 6C_3) + t^2(3C_2 + 12C_4) + \cdots + \\ + t^n[(n+1)C_n + (n+1)(n+2)C_{n+2}] + \cdots = 0\end{gathered}$$

de unde

$$C_0 + 2C_2 = 0,\ 2C_1 + 6C_3 = 0, ..., C_n(n+2)C_{n+2} = 0, ...$$

Astfel, am obţinut formula de recurenţă

$$C_{n+2} = -\frac{C_n}{n+2},$$

care dă

$$\begin{aligned} &C_2 = -\frac{C_0}{2},\ C_4 = -\frac{C_2}{4} = \frac{C_0}{2 \cdot 4},\ \cdots\ ,\ C_{2n} = \frac{(-1)^n C_0}{(2n)!!}, \cdots \\ &C_3 = -\frac{C_1}{3},\ C_5 = \frac{C_1}{3 \cdot 5},\qquad\quad \cdots\ ,\ C_{2n+1} = \frac{(-1)^n C_1}{(2n+1)!!}, \cdots \end{aligned}$$

Rezultă că

$$x(t) = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!!} + C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^{2n-1}}{(2n+1)!!}.$$

Se verifică imediat că cele două serii de puteri care apar în membrul drept sunt convergente pentru orice t. De asemenea, cei doi coeficienţi C_0 şi C_1 pot fi determinaţi dacă se prescriu condiţii de tip Cauchy pentru x, x' în $t = 0$.

Exemplul 2. Să se rezolve problema Cauchy

$$\left\{\begin{array}{l}(4-t^2)x'' - 2tx' + 12x = 0\\ x(1) = -7,\ x'(1) = 3.\end{array}\right. \tag{1.22}$$

Vom folosi metoda seriilor de puteri şi vom lua, în relaţia (1.20), $t_0 = 1$, deci $x(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n(t-1)^n$. De asemenea, dezvoltăm şi coeficienţii ecuaţiei (1.22) în serie de puteri în jurul lui $t_0 = 1$. Avem:

$$\begin{array}{l}4 - t^2 = 3 - 2(t-1) - (t-1)^2\\ -2t = -2 - 2(t-1)\\ 12 = 12\end{array}$$

şi ecuaţia (1.22) devine

$$\sum_{n=0}^{\infty}(12 - n - n^2)C_n(t-1)^n - \sum_{n=1}^{\infty}2n^2C_n(t-1)^{n-1} +$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}(3n^2 - 3n)C_n(t-1)^{n-2} = 0$$

care mai poate fi scrisă sub forma

$$\sum_{n=0}^{\infty}[3(n+1)(n+2)C_{n+2} - 2(n+1)^2C_{n+1} - (n-3)(n+4)C_n](t-1)^n = 0$$

şi conduce la relaţia de recurenţă

$$C_{n+2} = \frac{2(n+1)^2C_{n+1} + (n-3)(n+4)C_n}{3(n+1)(n+2)} \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{1.23}$$

Din condiţiile Cauchy asupra lui x, x' în $t_0 = 1$ obţinem $C_0 = -7$, $C_1 = 3$ şi folosind (1.23) rezultă $C_2 = 15$, $C_3 = 5$, $C_n = 0$ $(n = 4, 5, ...)$ iar soluţia $x(t) = -12t + 5t^2$.

Dacă coeficienţii ecuaţiei nu sunt polinoame în t, atunci aceştia se dezvoltă în serie Taylor şi se procedează în continuare ca în Exemplul 1. Ilustrăm acest lucru în:

Exemplul 3. Să se rezolve ecuaţia diferenţială

$$x'' + (\sin t)x = e^{t^2} \tag{1.24}$$

Dezvoltăm $\sin t$ şi e^{t^2} în serie Taylor în jurul lui $t = 0$ şi căutăm o soluţie sub forma

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n$$

Obţinem:

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!},\ e^{t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!}$$

apoi, înlocuind în ecuaţia (1.24), obţinem (identificând coeficienţii)

$$x = C_0\left(1 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 + \cdots\right) + C_1\left(t - \frac{t^4}{12} + \cdots\right) + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{12}t^4 + \cdots, \tag{1.25}$$

adică

$$x = C_0 x_1(t) + C_1 x_2(t) + x_3(t)$$

unde x_3 este o soluţie particulară. Se arată că seriile ce apar în (1.25) sunt convergente pentru orice t.

Observaţie. Cele mai multe ecuaţii diferenţiale nu se pot rezolva prin cuadraturi. În secţiunile anterioare am prezentat câteva tipuri de ecuaţii care pot fi rezolvate prin una din metodele standard. Dar o ecuaţie poate să aibă o formă diferită de cele prezentate anterior, însă, în anumite situaţii, printr-o schimbare de variabile inspirată, această diferenţă să dispară. Precizăm că nu există o regulă (sau algoritm) de determinare a unor astfel de substituţii. Totul ţine de îndemânarea şi experienţa rezolvitorului.

1.2 Inegalitatea lui Gronwall

Rezultatul pe care îl prezentăm în această secţiune este folosit în mod frecvent la demonstrarea mărginirii soluţiilor unor ecuaţii diferenţiale. Presupunem că x, f, g sunt funcţii continue pe intervalul $[a, b] \subset \mathbb{R}$ şi, în plus, $g(t) \geq 0$ pentru orice $t \in [a, b]$.

Lema 2.1. (Gronwall) *Dacă*

$$x(t) \leq f(t) + \int_a^t g(s)x(s)ds, \quad t \in [a, b] \tag{2.1}$$

atunci

$$x(t) \leq f(t) + \int_a^t f(s)g(s) \exp\left(\int_s^t g(\tau)d\tau\right) ds, \ \forall\, t \in [a,b], \tag{2.2}$$

unde exp(a)=e^a, $\forall\, a \in \mathbb{R}$.

Demonstraţie. Facem notaţia $y(t) = \displaystyle\int_a^t g(s)x(s)ds$.

Deoarece funcţiile g şi x sunt continue, rezultă că funcţia y este derivabilă şi $y'(t) = g(t)x(t)$, care împreună cu (2.1) implică

$$y'(t) \leq g(t)f(t) + g(t)y(t).$$

Înmulţind ultima inegalitate cu $\exp\left(-\displaystyle\int_a^t g(s)ds\right)$, rezultă

$$\frac{d}{dt}\left(y(t)\exp\left(-\int_a^t g(s)ds\right)\right) \leq f(t)g(t)\exp\left(-\int_a^t g(s)ds\right), \ t \in [a,b]. \tag{2.3}$$

Integrând inegalitatea (2.3) pe intervalul $[a,t]$ şi ţinând cont de (2.1) se obţine (2.2). ∎

Un caz particular interesant ce rezultă din Lema 2.1 corespunde situaţiei când f = constant.

Corolarul 2.1. *Dacă x satisface inegalitatea (2.1) cu $f = M =$ constant, atunci are loc*

$$x(t) \leq M \exp\left(\int_a^t g(s)ds\right), \quad t \in [a,b]. \tag{2.4}$$

Demonstraţie. Inegalitatea (2.4) se obţine imediat din (2.2), înlocuind f cu M şi integrând prin părţi al doilea termen din membrul drept. ∎

1.3 Modelarea matematică

Procesul reprezentării problemelor (fenomenelor) lumii reale în limbajul matematicii este cunoscut sub numele de *modelare matematică*. Primul pas în acest proces este transcrierea matematică a limbajului folosit pentru descrierea problemei. De obicei, pentru ca modelul matematic să fie suplu, acceptabil din punct de vedere al rezolvării (chiar cu ajutorul tehnicii de calcul) se renunţă la o parte din variabilele ce descriu problema iniţială. În acest fel, se obţine o structură logică ideală ce ascunde în ea o problemă concretă. În cazul nostru, această structură constă în una sau mai multe ecuaţii diferenţiale.

Oscilatorul armonic

Fie ecuaţia

$$mx'' + kx = 0. \tag{3.1}$$

Această ecuaţie reprezintă modelul matematic al fenomenului fizic dat de mişcarea unui punct material de masă m suspendat de un resort elastic.

Presupunem că resortul are lungimea ℓ. Dacă de resort suspendăm un corp de masă m, acesta va avea o elongaţie $\Delta\ell$ datorată forţei elastice dată de ecuaţia $mg = k\Delta\ell$ (greutatea corpului este anulată în efect de o forţă elastică statică $\vec{F}_{eo} = -k\Delta\vec{\ell}$), $k(> 0)$ fiind constanta elastică a resortului.

Fig. 3.1.

Putem considera ca origine de măsură a elongaţiei x punctul O din Figura 3.1.b. Scoţând sistemul din poziţia de echilibru, singura forţă necompensată rămâne forţa elastică $F_e = -kx$. Aplicând principiul II al dinamicii obţinem ecuaţia diferenţială a mişcării $ma = mx'' = -kx$, adică (3.1). Într-un model mai realist în care ţinem cont şi de forţele disipative (datorate vâscozităţii), ecuaţia principiului II al dinamicii se va scrie:

$$mx'' + \alpha x' + kx = 0.$$

Dacă, în plus, asupra sistemului acţionează şi o forţă exterioară $(F(t))$, ecuaţia devine

$$mx'' + \alpha x' + kx = F(t). \tag{3.2}$$

Spunem că sistemul are *oscilaţii libere* dacă $F \equiv 0$, în caz contrar el are oscilaţii forţate.

Circuitul RLC

Să considerăm circuitul din Figura 3.2 cunoscut şi sub numele de circuit RLC–serie. El este format dintr-un generator care, furnizând o tensiune de $V(t)$ volţi, este conectat în serie cu un rezistor de R-ohmi, un inductor de L henry şi un condensator de C farazi.

Fig. 3.2

Când comutatorul este închis, prin circuit trece un curent de intensitate $I = I(t)$ amperi.

Vrem să calculăm valoarea lui I ca funcţie de timp şi sarcina $Q = Q(t)$ (coulombi) în condensator la orice moment t. Prin definiţie

$$I = \frac{dQ}{dt}, \tag{3.3}$$

astfel că este suficient să calculăm doar Q.

După cum se ştie din fizică, curentul I produce o cădere de tensiune la bornele rezistorului egală cu RI, o cădere de tensiune în inductor egală cu $L(dI/dt)$ şi o cădere de tensiune în condensator egală cu $(1/C)Q$. Legea a II-a a lui Kirchhoff afirmă că tensiunea la bornele sursei este egală cu suma căderilor de tensiune pe circuit. Aplicând această lege circuitului din Fig. 3.2 (cu comutatorul închis), obţinem:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = V(t). \tag{3.4}$$

Din (3.3) şi (3.4) rezultă

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=V(t). \tag{3.5}$$

Aceasta este o ecuaţie diferenţială de ordinul doi neomogenă. Pentru a găsi sarcina $Q(t)$ în condensator, trebuie să determinăm soluţia generală a ecuaţiei (3.5), soluţie care depinde de două constante arbitrare. Pentru a determina aceste constante se impun condiţiile iniţiale $Q(0)=Q_0$ şi $Q'(0)=I(0)=0$. Condiţia a doua asupra lui Q' este naturală deoarece la momentul $t=0$ nu este curent în circuit. Pentru a determina $I(t)$, putem folosi relaţia (3.3) sau ecuaţia diferenţială

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=\frac{dV(t)}{dt},$$

care se obţine din (3.3) prin diferenţiere.

Observaţie. Este uşor de observat faptul că, deşi modelează fenomene diferite, din punct de vedere matematic ecuaţiile (3.2) şi (3.5) reprezintă acelaşi lucru. Analogia dintre sistemele mecanice şi electrice (analizate) este pusă în evidenţă în tabelul următor.

Tabelul 1

Sisteme mecanice	**Sisteme electrice**
Masa m	Inductanţa L
Constanta de frecare α	Rezistenţa R
Modulul de elasticitate k	Inversa capacităţii $1/C$
Deplasarea x	Sarcina condensatorului Q
Forţa exterioară $F(t)$	Tensiunea electromotoare $V(t)$
Viteza x'	Intensitatea I

Ecuaţia van der Pol

Să considerăm un circuit de tip RLC unde în locul rezistorului se pune un semiconductor. Diferenţa dintre rezistor şi semiconductor este aceea că rezistorul disipează energia la toate nivelele, pe când semiconductorul pompează energia în circuit la nivele de jos şi absoarbe energia la nivele înalte. Presupunem că pe semiconductor are loc o cădere de tensiune dată de

$$V_S=I(I^2-a)$$

unde I este intensitatea curentului iar a, o constantă pozitivă. În plus căderile de tensiune pe inductor şi condensator sunt date de: $V_L = L\frac{dI}{dt}$, respectiv $\frac{dV_C}{dt} = \frac{I}{C}$.

Din legile lui Kirchhoff rezultă

$$V_L + V_C + V_S = 0$$

care implică

$$\frac{dI}{dt} = \frac{V_L}{L} = -\frac{V_S + V_C}{L} = \frac{-I^3 + aI - V_C}{L}$$

de unde rezultă sistemul

$$\left\{ \begin{array}{l} I' = \frac{a}{L}I - \frac{V_C}{L} - \frac{I^3}{L} \\ V_C' = \frac{I}{C}. \end{array} \right. \tag{3.6}$$

Pentru simplificarea sistemului (1) se fac substituţiile

$$I = \alpha x,\ V_C = \beta y,\ t = \gamma s,$$

unde α, β, γ sunt aleşi astfel încât:

$$\alpha\gamma = \beta C \ \text{ şi } \ \alpha^2\gamma = L. \tag{$*$}$$

Revenind la sistemul (3.6) avem

$$\frac{\alpha x}{C} = \frac{I}{C} = \frac{dV_C}{dt} = \frac{d(\beta y)}{ds}\ \frac{ds}{dt} = \frac{\beta}{\gamma}\ \frac{dy}{ds},$$

şi

$$\frac{\alpha}{\gamma}\ \frac{dx}{ds} = \frac{d(\alpha x)}{ds}\ \frac{ds}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{a}{L}I - \frac{V_C}{L} - \frac{I^3}{L} = \frac{a\alpha}{L}x - \frac{\beta}{L}y - \frac{\alpha^3}{L}x^3$$

şi, având în vedere condiţiile ($*$), sistemul (3.6) devine

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{ds} = \mu x - y - x^3 \\ \frac{dy}{ds} = x \end{array} \right.$$

unde $\mu = \frac{a\gamma}{L}$, sistem care este echivalent cu ecuaţia

$$y'' + y = \mu(1 - y^2)y'$$

cunoscută şi sub numele de *ecuaţia van der Pol* (B. van der Pol, 1889–1959).

Traiectorii ortogonale

Considerăm familia uniparametrică de curbe dată prin

$$F(x,y)=c. \tag{3.7}$$

Diferenţiind relaţia (3.7) obţinem

$$F_x dx + F_y dy = 0$$

unde F_x şi F_y sunt derivatele parţiale ale lui F în raport cu x şi y. Rezultă că panta fiecărei curbe a familiei (3.7) este

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}\cdot$$

Vrem să determinăm o altă familie de curbe care să aibă proprietatea: fiecare curbă a noii familii taie fiecare curbă a familiei (3.7) într-un punct în care tangentele la cele două curbe sunt perpendiculare. Se spune că traiectoriile celor două familii sunt ortogonale. Evident, panta traiectoriei ortogonale unei curbe din (3.7) este dată de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_y}{F_x}\cdot$$

Enumerăm câteva fenomene fizice în care apar traiectoriile ortogonale:

1. În câmpul electrostatic, liniile de forţă sunt ortogonale faţă de liniile de potenţial constant.

2. În curgerea bidimensională a fluidelor, liniile de curgere a fluidului, numite linii de curent, sunt ortogonale faţă de liniile de potenţial constant ale fluidului.

3. În meteorologie traiectoriile ortogonale ale izobarelor (curbe ce leagă suprafeţe de presiune barometrica egală) dau direcţia vântului: de la zone cu presiune atmosferică mare către cele cu presiune atmosferică mică.

Modelul pradă–răpitor

Acest model este din dinamica populaţiei. Fie $x(t)$ şi $y(t)$ numărul de indivizi la momentul t aparţinând la două specii, prima specie reprezentând prada iar a doua răpitorii. Cele două specii convieţuiesc în aceeaşi zonă. Pentru a construi modelul de interacţiune dintre specii, facem următoarele ipoteze:

(i) În absenţa răpitorilor, prada are o rată de creştere proporţională cu numărul de indivizi, adică: dacă $y(t) = 0$, $x'(t) = ax(t)$, $a > 0$ fiind o constantă.

(ii) În absenţa prăzii, răpitorii mor, au o rată de creştere proporţională cu numărul lor de indivizi, deci $y'(t) = -cy(t)$, $(c > 0)$, dacă $x(t) = 0$.

(iii) Numărul de întâlniri (ciocniri) dintre membrii celor două specii este proporţional cu produsul $x(t) \cdot y(t)$. Aceste întâlniri au ca efect descreşterea numărului indivizilor pradă şi influenţează pozitiv creşterea numărului prădătorilor.

Aceste ipoteze conduc la sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy, \end{cases} \tag{3.8}$$

a, b, c, d fiind constante pozitive.

Sistemul (3.8) mai este cunoscut sub numele de modelul Lotka–Volterra (A.J. Lotka (1880–1949); V. Volterra (1860–1940)), după numele celor care l-au introdus.

Menţionăm că sistemul (3.8) poate fi folosit pentru modelarea unei clase largi de probleme.

Dozajul medicamentelor

Este cunoscut din medicină că penicilina şi alte medicamente administrate unui pacient dispar din corpul acestuia după următoarea regulă: dacă $x(t)$ este cantitatea de medicament din corpul uman la momentul t, atunci viteza de eliminare $x'(t)$ a medicamentului este proporţională cu $x(t)$, adică x satisface ecuaţia diferenţială

$$x'(t) = -kx(t) \tag{3.9}$$

unde $k > 0$ este o constantă ce depinde de medicament şi care se determină experimental.

Din (3.9) rezultă

$$x(t) = x_0 e^{-kt} \tag{3.10}$$

unde $x_0 = x(0)$ este doza administrată iniţial.

Din (3.10) se remarcă faptul că $x(t) \to 0$ pentru $t \to \infty$. În practica medicală însă este necesar să se menţină o anumită concentraţie a medicamentului în corp pentru un timp mai îndelungat.

În acest scop se administrează pacientului o doză iniţială x_0, apoi la intervale egale de timp, τ ore de exemplu, se dă pacientului doza D de medicament. Dacă dorim ca în corpul pacientului la momentele $\tau, 2\tau, 3\tau$... să se menţină doza iniţială x_0, atunci doza D care trebuie administrată în aceste momente se determină din relaţia

$$x_0 e^{-k\tau} + D = x_0$$

de unde

$$D = x_0(1 - e^{-k\tau}).$$

Menţionăm faptul că ecuaţia (3.9) caracterizează şi dezintegrarea radioactivă.

Poluarea apei în lacuri

Una din problemele create de industrializare este poluarea apei. Un râu poluat se va curăţa relativ repede întrucât curgerea apei atrage după sine şi poluantul. Purificara unui lac (de substanţe poluante), făcută doar prin scurgerea apei, este un proces dificil necesitând o cantitate foarte mare de apă. Prezentăm un model de purificare în timp a lacului, bazat pe scurgerea graduală a apei din lac. Pentru aceasta se fac următoarele ipoteze:

1. Ratele intrării (afluxului) şi scurgerea apei din lac au valori aproximativ egale (le notăm cu r).

2. Poluanţii sunt uniform distribuiţi în apă. Concentraţiile lor în apa ce intră în lac şi apa din lac sunt notate cu C_1 respectiv C_2.

3. Poluanţii sunt îndepărtaţi numai prin procesul natural al scurgerii apei din lac.

Din ipotezele de mai sus, în intervalul de timp Δt, modificarea poluării totale = cantitea de poluant intrată în lac – cantitatea de poluant scursă din lac, care conduce la expresia analitică

$$\Delta(VC_2) = (C_1 - C_2)r\Delta t + \theta(\Delta t) \tag{3.11}$$

unde V este volumul lacului, iar $\theta(\Delta t)/\Delta t \longrightarrow 0$ pentru $\Delta t \longrightarrow 0$. Cantitatea $\theta(\Delta t)$ se introduce deoarece atât C_1 cât şi C_2 depind de t.

Din relaţia (3.11) se obţine ecuaţia diferenţială

$$C_2' = \frac{(C_1 - C_2)}{V} r$$

care este o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi şi are soluţia

$$C_2(t) = e^{-t/T}\left[C_2(0) + T^{-1}\int_0^t C_1(s)e^{s/T}ds\right] \tag{3.12}$$

unde $T = \dfrac{V}{r}$ este numărul de ani necesari pentru golirea lacului dacă rata scurgerii se menţine constantă iar sursa de poluare este stopată.

Dacă sursa de poluare este stopată ($C_1 = 0$) din (3.12), rezultă că timpul necesar pentru a reduce concentraţia poluantului din lac la jumătate este

$$t = T \ln 2.$$

1.4 Probleme

Să se rezolve următoarele ecuaţii diferenţiale:

Ecuaţii cu variabile separabile:

1. $x' = (x-1)(x-2)$; **2.** $x' = t^3 x^{-2}$; **3.** $x' = tx^2 + x^2 + tx + x$;

4. $\begin{cases} x' = \dfrac{t(x^2+3)}{(1+t^2)x} \\ x(1) = 3; \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} x' = \dfrac{t(x^2-1)}{(t-1)x^3} \\ x(2) = 1. \end{cases}$

Ecuaţii omogene:

6. $x' = \dfrac{t-x}{t+x}$; **7.** $x' = \dfrac{x}{t} + \sin\dfrac{x-t}{t}$; **8.** $x' = \dfrac{4tx - x^2}{2t^2}$; **9.** $\begin{cases} x' = \dfrac{xt}{x^2+t^2} \\ x(0) = 1. \end{cases}$

Ecuaţii liniare:

10. $(t^2+1)x' = 2tx + t^3$; **11**. $x' = -2x + e^{-2t}$;

12. $t^2 x' = -tx + t + 1$; **13**. $x' = x\dfrac{\cos t}{\sin t} + 2t\sin t$;

14. $x' = 2tx - t^3 + t$; **15**. $x' = -\dfrac{t}{t^2+1}x + \dfrac{1}{t(1+t^2)}$.

Ecuaţii de tip Bernoulli:

16. $\begin{cases} x' = \dfrac{t}{2(t^2-1)}x + \dfrac{t}{2x} \\ x(0) = 1 \end{cases}$; **17**. $tx' = 4x + t^2\sqrt{x}$.

Ecuaţii cu diferenţiale exacte:

18. $(2t + x^2)dt + (2tx + 1)dx = 0$;

19. $(x\cos t + x^2)dt + (\sin t + 2tx + 3x^2)dx = 0$;

20. $x^2(t - x)dt + (1 - tx^2)dx = 0$; **21**. $(t^2 + 2t + x^2)dt + 2xdx = 0$;

22. $2tx\,dt + (t^2 + \cos x)dx = 0$; **23**. $\begin{cases} (tx^2 - 1)dt + (t^2x - 1)dx = 0 \\ x(0) = 1. \end{cases}$

Ecuaţii rezolvabile cu ajutorul factorului integrant:

24. $x\,dx + t\,dt + (t^2 + x^2)t^2dt = 0 \ \left(\rho = e^{2t^3/3}\right)$;

25. $x\,dt + (3t - x + 3)dx = 0$ $(\rho = x^2)$.

Ecuaţii Lagrange:

26. $tx'^2 + (x - 3t)x' + x = 0$; **27.** $x = 2tx' - x'^3$.

Ecuaţii care admit reducerea ordinului:

28. $x' - tx'' + x''^3 = 0$; **29**. $x''^2 - 2tx'' - x' = 0$; **30**. $xx'' - x'^2 = 0$.

Ecuaţii rezolvabile prin serii de puteri:

31. $\begin{cases} xx'' + 3x'^2 = 0 \\ x(0) = 1,\ x'(0) = \dfrac{1}{4} \end{cases} \quad \left(x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n t^n\right)$

32. $\begin{cases} x'' + x = 0 \\ x(10) = 0,\ x'(10) = 1 \end{cases} \quad \left(x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n (t-10)^n\right)$

Ecuaţii rezolvabile cu ajutorul substituţiilor:

33. $x' = \sqrt{x + \sin t} - \cos t \quad \left(u = \sqrt{x + \sin t}\right)$;

34. $(t^2x^3 + 2tx^2 + x)dt + (t^3x^2 - 2t^2x + t)dx = 0 \quad (u = tx)$;

35. $xx'' = (x')^2 + 6tx^2 \quad \left(x = e^{\int y\,dt}\right)$;

36. $9xx' - 18tx + 4t^3 = 0 \quad (x = y^2)$;

37. $t^2x'' + tx' + \left(t^2 - \dfrac{1}{4}\right)x = 0 \quad \left(y = \sqrt{t}\,x\right)$;

38. $x(1 + 2tx)dt + t(1 - 2tx)dx = 0 \quad (u = 2tx)$.

Capitolul 2

Problema Cauchy pentru ecuaţii diferenţiale

În capitolul I am prezentat diferite tipuri de ecuaţii diferenţiale pentru care ştim să găsim soluţia generală. Aşa cum am mai menţionat, această clasă de ecuaţii (rezolvabile prin cuadraturi) este foarte restrânsă, motiv pentru care încă de pe vremea lui Euler s-a pus problema aproximării soluţiei unei ecuaţii. Dar pentru a aproxima o soluţie trebuie, în primul rând, să ştim că aceasta există. Iar dacă existenţa este asigurată, ne interesează unicitatea soluţiei pentru că, în caz contrar, nu ştim ce soluţie aproximăm. Teorema Cauchy–Picard oferă un rezultat de existenţă şi unicitate şi în acelaşi timp o metodă de construcţie aproximativă a soluţiei unei ecuaţii diferenţiale.

2.1 Formularea problemei – metoda lui Picard

Fie *problema Cauchy* (cu valori iniţiale)

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

unde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă. Deoarece f este continuă se observă că relaţia (1.1) este echivalentă cu

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds. \tag{1.2}$$

Aşadar, a rezolva problema (1.1) este totuna cu a rezolva ecuaţia integrală (1.2). Presupunem că $x_0(\cdot)$ este o funcţie continuă ce reprezintă o aproximantă a soluţiei ecuaţiei (1.2). Înlocuind $x(s)$ cu $x_0(s)$, membrul drept al

ecuaţiei (1.2) defineşte o nouă funcţie notată

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0(s))ds.$$

Repetând procedeul, obţinem funcţia

$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s))ds,$$

şi, în mod recurent, obţinem şirul de funcţii $x_3(t), x_4(t), ...$ în care termenul de pe locul "n" este dat de formula

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))ds. \tag{1.3}$$

În practică, se ia $x_0(\cdot) = x_0$. Şirul (x_n) se numeşte *şirul aproximaţiilor succesive*, iar metoda prin care se construieşte şirul (x_n) se numeşte *metoda aproximaţiilor succesive a lui Picard* (E.Picard, 1856–1941).

Utilizând această construcţie, vom demonstra că, în anumite condiţii impuse funcţiei f, problema (1.1) are o soluţie locală unică. Teorema pe care o demonstrăm în continuare este cunoscută sub numele de *teorema de existenţă şi unicitate a lui Cauchy–Picard*.

Teorema 1.1. *Fie* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *unde*

$$D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2;\ |t - t_0| \leq a,\ |x - x_0| \leq b;\ a, b \in \mathbb{R}^+\}. \tag{1.4}$$

Dacă

(i) *funcţia* f *este continuă pe* D*;*

(ii) *funcţia* f *este lipschitziană în a doua variabilă pe* D*, adică există* $L > 0$ *astfel încât*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|, \quad \forall\, (t, x), (t, y) \in D, \tag{1.5}$$

atunci există şi este unică o soluţie $x = x(t)$ *a problemei Cauchy* (1.1)*, definită pe intervalul* $I = \{t; |t - t_0| \leq \delta\}$ *unde*

$$\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\};\ M = \max\{|f(t, x)|;\ (t, x) \in D\}. \tag{1.6}$$

Demonstraţie. Existenţa. Aşa cum am menţionat, problema (1.1) este echivalentă cu ecuaţia integrală (1.2), deci este suficient să arătăm că aceasta din urmă are o soluţie unică pe intervalul I. În acest scop construim şirul aproximaţiilor succesive (cu $x_0(\cdot) = x_0$) pentru soluţia ecuaţiei (1.2). În legătură cu acest şir vom demonstra următoarele:

(j) şirul (x_n) este bine definit;

(jj) şirul (x_n) este uniform convergent;

(jjj) limita şirului (x_n) este soluţia ecuaţiei (1.2).

În continuare ne vom mărgini la intervalul $[t_0, t_0+\delta]$ deoarece pe intervalul simetric $[t_0-\delta, t_0]$ lucrurile se petrec în mod analog.

Pentru a demonstra (j) este suficient să arătăm că funcţiile continue x_0, $x_1(t)$, $x_2(t), ...$, pentru $t_0 \le t \le t_0+\delta$ au graficele în D, domeniul în care este definită funcţia f, deci că pentru $n = 0, 1, 2, ...$ este verificată inegalitatea:

$$|x_n(t) - x_0| \le b, \quad \text{pentru } t_0 \le t \le t_0 + \delta. \tag{1.7}$$

Inegalitatea (1.7) este evidentă pentru $n = 0$; presupunând-o valabilă pentru $n-1$, din (1.3) rezultă:

$$|x_n(t) - x_0| \le \int_{t_0}^{t} |f(s, x_{n-1}(s)| ds \le M(t-t_0) \le M\delta \le b,$$

şi, conform principiului inducţiei matematice, inegalitatea (1.7) este valabilă pentru orice n natural.

Pentru a demonstra (jj), considerăm seria de funcţii

$$x_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (x_{k+1}(t) - x_k(t)) \tag{1.8}$$

pentru care suma primilor $(n+1)$ termeni este:

$$x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}(t) - x_k(t)) = x_n(t).$$

Folosind criteriul lui Weierstrass, vom demonstra că seria (1.8) este absolut şi uniform convergentă pe $[t_0, t_0+\delta]$, căutând o serie majorantă pentru modulele termenilor săi. Din (1.3) şi (1.6) rezultă că pentru $n = 1$ avem:

$$|x_1(t) - x_0| \le M(t - t_0). \tag{1.9}$$

Apoi, din (1.3), (1.5), (1.6), rezultă (ţinând cont de (1.9)):

$$|x_2(t) - x_1(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} (f(s, x_1(s)) - f(s, x_0(s)))ds \right| \le$$
$$\le L \int_{t_0}^{t} |x_1(s) - x_0(s)|ds \le L \int_{t_0}^{t} M(s - t_0)ds = LM \frac{(t - t_0)^2}{2}.$$

Raţionând inductiv, obţinem inegalitatea

$$|x_{k+1}(t) - x_k(t)| \le ML^k \frac{(t - t_0)^{k+1}}{(k+1)!} \le \frac{M}{L} \cdot \frac{(L\delta)^{k+1}}{(k+1)!}$$

de unde rezultă că pentru $t_0 \le t \le t_0 + \delta$, modulul termenului general al seriei (1.8) este majorat de termenul general al seriei convergente cu termeni pozitivi:

$$\frac{M}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(L\delta)^k}{k!} = \frac{M}{L}(e^{L\delta} - 1).$$

În consecinţă, seria (1.8) este absolut şi uniform convergentă în $[t_0, t_0 + \delta]$. Fie $x(\cdot)$ limita uniformă a şirului $x_n(\cdot)$; dacă se trece la limită în ambii membri ai relaţiei (1.3) şi se utilizează proprietăţile funcţiilor continue şi ale integralelor de şiruri de funcţii uniform convergente, rezultă că pe intervalul $[t_0, t_0 + \delta]$ avem:

$$x(t) = x_0 + \lim_{n \to \infty} \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

deci funcţia $x(\cdot)$ astfel construită verifică ecuaţia integrală (1.2) în intervalul $[t_0, t_0 + \delta]$, ceea ce demonstrează afirmaţia (jjj).

Unicitatea. Presupunem prin reducere la absurd că ecuaţia (1.2) mai are o soluţie $y(\cdot)$, deci

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds. \tag{1.10}$$

Scăzând (1.10) din (1.3) şi folosind condiţia Lipschitz (1.5), obţinem

$$|x_n(t) - y(t)| \le L \int_{t_0}^{t} |x_{n-1}(s) - y(s)|ds. \tag{1.11}$$

Dar, din (1.10) rezultă

$$|y(t) - x_0| \le M(t - t_0), \tag{1.12}$$

iar din (1.11), ţinând cont de (1.12), obţinem prin recurenţă

$$|x_n(t) - y(t)| \leq L^n M \frac{(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{M}{L} \frac{(L\delta)^{n+1}}{(n+1)!},$$

de unde rezultă că $x_n(t) \longrightarrow y(t)$ pentru $n \to \infty$, $\forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ deci $y(\cdot) = x(\cdot)$, ceea ce încheie demonstraţia unicităţii şi a teoremei. ∎

Observaţii.

1. Dacă funcţia f admite derivată parţială $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ mărginită în D, atunci condiţia Lipschitz (1.5) este verificată în D.
2. Unicitatea soluţiei se poate demonstra uşor plecând de la relaţiile (1.3) şi (1.10) şi aplicând inegalitatea lui Gronwall modulului diferenţei $(x(t) - y(t))$.
3. Se poate demonstra că problema Cauchy (1.1) admite soluţie chiar atunci când f satisface doar condiţia (i), deci nu este lipschitziană în a doua variabilă.

În acest caz însă, nu mai este asigurată unicitatea după cum se poate observa din exemplul următor:

Problema Cauchy

$$\begin{cases} x' = \sqrt[5]{x}, \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

are pentru $t \geq 0$ o infinitate de soluţii

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq C \\ \left[\dfrac{4}{5}(t-C)\right]^{\frac{5}{4}}, & t \geq C \end{cases}$$

$C > 0$ fiind un număr arbitrar.

Evaluarea erorii în aproximarea soluţiei prin metoda lui Picard rezultă din

$$|x(t) - x_n(t)| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |x_{k+1}(t) - x_k(t)| \leq \frac{M}{L} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{L^k (t-t_0)^k}{k!} \leq$$

$$\leq \frac{M}{L} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(L\delta)^k}{k!} < \frac{M}{L} \frac{(L\delta)^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(L\delta)^k}{k!}$$

de unde

$$|x(t) - x_n(t)| \le \frac{M}{L}\,\frac{(L\delta)^{n+1}}{(n+1)!}e^{L\delta}. \tag{1.13}$$

Evaluarea (1.13) este valabilă pentru orice $t \in I$. Deoarece $\dfrac{(L\delta)^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ pentru $n \longrightarrow \infty$, inegalitatea (1.13) ne dă o informaţie asupra numărului de iteraţii necesare pentru obţinerea soluţiei pe întreg intervalul I, cu o aproximaţie dorită.

Exemplu numeric. Se consideră ecuaţia de tip Riccati

$$x' = x^2 + tx + t$$

unde $|t| \le \dfrac{1}{2}$, $|x| \le 1$ şi se cere să se aproximeze soluţia care verifică condiţia Cauchy $x(0) = 0$.

Avem: $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 1$, $M = 2$. Rezultă $\delta = \min\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right\} = \dfrac{1}{2}\cdot$ Apoi în $D = \left\{(t,x);\ |t| \le \dfrac{1}{2},\ |x| \le 1\right\}$ avem:

$$|f(t,x) - f(t,y)| = \left|x^2 - y^2 + tx - ty\right| \le |x-y||x+y+t| \le \frac{5}{2}|x-y|,$$

deci $L = \dfrac{5}{2}\cdot$ Inegalitatea (1.13) devine:

$$|x(t) - x_n(t)| \le \frac{4}{5}\,\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^{\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}},$$

valabilă pe tot intervalul $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

De exemplu, pentru $n = 3$

$$|x(t) - x_3(t)| \le \frac{125}{1256}\cdot e^{\frac{5}{4}} \cong 0,2826.$$

Rezultă că $x_3(\cdot)$ aproximează soluţia exactă, în intervalul $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, cu o eroare absolută mai mică decât $0,2827$.

Aproximaţiile succesive se calculează cu formula (1.3), adică (în cazul nostru):

$$x_{n+1}(t) = \int_0^t (x_n^2(s) + s x_n(s) + s)ds,\ x_0 = 0.$$

Rezultă imediat că:

$$x_1(t) = \frac{1}{2}t^2; \; x_2(t) = \frac{t^5}{20} + \frac{t^4}{8} + \frac{t^2}{2};$$

$$x_3(t) = \frac{t^{11}}{4400} + \frac{t^{10}}{800} + \frac{t^9}{576} + \frac{t8}{160} + \frac{t^7}{40} + \frac{t^6}{48} + \frac{t^5}{20} + \frac{t^4}{8} + \frac{t^2}{2}.$$

2.2 Teorema de existenţă şi unicitate pentru sisteme de ecuaţii diferenţiale de ordinul I

Fie $\mathbb{R}^n$ spaţiul real de dimensiune n, ale cărui elemente sunt vectorii n-dimensionali de forma $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ scrişi sub formă de linie sau coloană.

Componentele $x_1, x_2, ..., x_n$ ale n-uplului $(x_1, x_2, ..., x_n)$ se numesc *coordonatele vectorului x*.

Spaţiul $\mathbb{R}^n$ se organizează ca spaţiu liniar (sau vectorial) cu operaţiile obişnuite de adunare a vectorilor şi înmulţire a vectorilor cu scalari.

Se numeşte *normă* o funcţie reală, notată $\|\cdot\|$, definită pe $\mathbb{R}^n$, care satisface condiţiile:

(i) $\|x\| \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$, iar $\|x\| = 0$ dacă şi numai dacă toate componentele lui x sunt nule deci $x = 0$,

(ii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \; \forall \, x, y \in \mathbb{R}^n$, numită *inegalitatea triunghiului*,

(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \; \forall \, \lambda \in \mathbb{R}, \; x \in \mathbb{R}^n$.

Orice normă induce pe $\mathbb{R}^n$ o topologie, care permite definirea noţiunii de convergenţă.

Astfel, vom spune că şirul $\{x^p\}_{p=1}^{\infty}$ converge la x în norma $\|\cdot\|$, dacă $\lim\limits_{p \to \infty} \|x^p - x\| = 0$. Evident, condiţia necesară şi suficientă ca $\{x^p\}$ să tindă către x, este ca toate componentele lui $x^p = (x_1^p, x_2^p, ..., x_n^p)$ să tindă către componentele corespunzătoare ale lui x.

Rezultă de aici că oricare două norme pe $\mathbb{R}^n$ definesc aceeaşi convergenţă, cu alte cuvinte sunt echivalente.

Printre normele cele mai utilizate pe $\mathbb{R}^n$ sunt:

$$\|x\|_e = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}, \; x = (x_1, ..., x_n) \text{ – norma euclidiană} \tag{2.1}$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \; x = (x_1, ..., x_n) \tag{2.2}$$

$$\|x\|_2 = \max\{|x_i|,\ i = 1, ..., n\},\ x = (x_1, ..., x_n). \tag{2.3}$$

Dacă vectorul x depinde de t şi componentele sale sunt funcţii derivabile de t, vom numi derivata lui x vectorul ale cărui componente sunt derivatele componentelor lui x, adică:

$$x' = \frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}\right).$$

De asemenea, definim integrala vectorului x prin:

$$\int_a^b x(t)dt = \left(\int_a^b x_1(t)dt, \int_a^b x_2(t)dt, ..., \int_a^b x_n(t)dt\right).$$

Este evident că pentru $a < b$ are loc inegalitatea

$$\left\|\int_a^b x(t)dt\right\| \leq \int_a^b \|x(t)\|dt.$$

Cu aceste pregătiri putem enunţa teorema de existenţă şi unicitate pentru sisteme diferenţiale.

Teorema 2.1. *Fie sistemul diferenţial*

$$x_i' = f_i(t, x_1, ..., x_n),\ i = 1, ..., n, \tag{2.4}$$

cu condiţiile iniţiale

$$x_i(t_0) = x_i^0,\ i = 1, ..., n, \tag{2.5}$$

unde f_i sunt funcţii continue de cele $(n+1)$ argumente ale lor în paralelipipedul $(n+1)$–dimensional

$$D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1};\ |t - t_0| \leq a,\ \|x - x_0\| \leq b;\ a, b \in \mathbb{R}^+\}.$$

Presupunem că funcţia vectorială $f(t, x) = (f_1(t, x), ..., f_n(t, x))$ verifică în D condiţia lui Lipschitz

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|,\ \forall\,(t, x), (t, y) \in D.$$

În aceste condiţii sistemul diferenţial (2.4) cu condiţiile iniţiale (2.5) are o soluţie unică pe intervalul $I = \{t;\ |t - t_0| \leq \delta\}$ unde

$$\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\};\ M = \max\{\|f(t, x)\|;\ (t, x) \in D\}.$$

Demonstraţia Teoremei 2.1 urmează pas cu pas pe cea a Teoremei 1.1 astfel că o lăsăm în seama cititorului.

2.3 Existenţa şi unicitatea soluţiei unei ecuaţii diferenţiale de ordin superior

Considerăm ecuaţia diferenţială de ordinul n, scrisă sub forma normală

$$x^{(n)} = f(t, x, x', ..., x^{(n-1)}). \tag{3.1}$$

Prin soluţie pentru ecuaţia (3.1) pe intervalul $I \subset \mathbb{R}$ înţelegem o funcţie de clasă C^n pe I, care verifică relaţia (3.1) în orice punct $t \in I$, iar prin problemă Cauchy asociată ecuaţiei (3.1) înţelegem determinarea unei soluţii x care la un moment dat $t = t_0 \in I$ verifică condiţiile

$$x(t_0) = x_1^0, x'(t_0) = x_2^0, ..., x^{(n-1)}(t_0) = x_n^0; \tag{3.2}$$

$x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$ fiind fixate.

Prin intermediul transformării

$$x_1 = x,\ x_2 = x', ..., x_n = x^{(n-1)} \tag{3.3}$$

ecuaţia (3.1) devine echivalentă cu sistemul diferenţial de ordinul 1

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = f(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases} \tag{3.4}$$

iar condiţiile iniţiale devin

$$x_i(t_0) = x_i^0,\ i = 1, 2, ..., n. \tag{3.5}$$

În acest fel, pentru a rezolva problema Cauchy asociată ecuaţiei (3.1) este suficient să rezolvăm problema Cauchy asociată sistemului (3.4).

Presupunem că f satisface următoarele condiţii

(i) f este continuă pe mulţimea $D = \{(t, x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; |t - t_0| \leq a, |x_i - x_i^0| \leq b,\ i = 1, 2, ..., n;\ a, b \in \mathbb{R}^+\}$

(ii) f verifică în D condiţia Lipschitz
$|f(t, x_1, x_2, ..., x_n) - f(t, y_1, y_2, ..., y_n)| \leq L \max\{|x_i - y_i|;\ i = 1, 2, ..., n\}$
pentru toţi $(t, x_1, x_2, ..., x_n), (t, y_1, y_2, ..., y_n)$ din D.

Teorema care urmează este un caz particular al Teoremei 2.1.

Teorema 3.1. *Dacă sunt verificate condiţiile* (i) *şi* (ii), *problema Cauchy* (3.1), (3.2) *admite o soluţie unică* $x=x(t)$ *definită pe intervalul* $I=\{t; |t-t_0|\leq\delta\}$ *unde* $\delta = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$ *şi*

$$M = \max\{|f(t, x_1, x_2, ..., x_n)|, |x_2|, ..., |x_n|;\ (t, x_1, x_2, ..., x_n) \in D\}.$$

Exemplul 3.1. Să se rezolve problema Cauchy

$$t^3x''' + 3t^2x'' + tx' - x = 0,\ x(1) = 0,\ x'(1) = 0,\ x''(1) = 1.$$

Soluţie. Ecuaţia este de tip Euler. Făcând, pentru $t > 0$, substituţia $t = e^\tau$, ecuaţia devine $\dfrac{d^3x}{d\tau^3} - x = 0$ care este ecuaţie diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi şi are soluţia

$$x(\tau) = C_1e^\tau + e^{-\tau/2}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\tau + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\tau\right)$$

şi, revenind la substituţie, găsim soluţia generală

$$x(t) = C_1t + \frac{1}{\sqrt{t}}\left[C_2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln t\right) + C_3\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln t\right)\right],\ t > 0.$$

Impunând condiţiile iniţiale, găsim $C_1 = \dfrac{1}{3}$, $C_2 = -\dfrac{1}{3}$, $C_3 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ şi deci soluţia problemei este

$$x(t) = \frac{1}{3}t - \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln t\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln t\right)\right],\ t > 0.$$

În cazul în care nu sunt îndeplinite condiţiile teoremei, nu avem unicitate după cum se poate vedea din exemplul următor.

Exemplul 3.2. Ecuaţia neliniară de ordinul al doilea

$$3(x')^2x'' + 24(1 - x) = 0;\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0,$$

are cel puţin trei soluţii: $x(t) = 1$, $x(t) = 1 - t^2$ şi $x(t) = 1 + t^2$.

2.4 Prelungibilitatea unei soluţii cu condiţii iniţiale date

Să considerăm problema Cauchy

$$\text{(4.1)} \qquad \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

unde f este o funcţie continuă într-un domeniu $D \subset \mathbb{R}^2$.

Dacă derivata parţială $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ este continuă în D, atunci, aşa cum am văzut în Teorema 1.1, problema Cauchy (4.1) admite o soluţie locală unică (deoarece se poate construi un paralelipiped centrat în (t_0, x_0), în care funcţia f satisface condiţia lui Lipschitz relativ la x).

Uneori, chiar pentru ecuaţii neliniare foarte simple, nu există o soluţie pe întregul interval de variaţie al variabilei t, inclus în proiecţia pe Ot a lui D.

Spunem că soluţia $x = \varphi(t)$ a problemei (4.1) definită pe un interval $I = [a, b]$ este *prelungibilă* dacă există o soluţie $x = \psi(t)$ a problemei, definită pe un interval $J \supset I$ astfel încât $\varphi \equiv \psi$ pe I. Prelungibilitatea soluţiei $x = \varphi(t)$ la stânga punctului $t = a$, respectiv la dreapta punctului $t = b$, se defineşte în mod natural. O soluţie care nu este prelungibilă se numeşte *saturată*. Din teorema de existenţă şi unicitate locală (cazul lipschitzian) rezultă că intervalul de definiţie al unei soluţii saturate este deschis.

De exemplu, problema Cauchy

$$\begin{cases} x' = x^2 + 1 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

are ca soluţie funcţia $x = \operatorname{tg} t$ care nu poate fi prelungită decât până la intervalul deschis $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

În teorema care urmează dăm un criteriu simplu de prelungibilitate.

Teorema 4.1. *Fie problema Cauchy* (4.1) *unde f este o funcţie continuă în ambele variabile, lipschitziană în variabila x şi mărginită în D. Fie* (a, b) *intervalul finit pe care s-a definit soluţia $x(\cdot)$ a problemei* (4.1). *În acest caz există*

$$\lim_{\substack{t \to a \\ t > a}} = x(a_+) \quad \text{şi} \quad \lim_{\substack{t \to b \\ t < b}} = x(b_-).$$

Presupunem că $(b, x(b_-)) \in D$. În acest caz soluţia poate fi prelungită la dreapta punctului $t = b$. Prelungibilitatea la stânga punctului $t = a$ se tratează în mod similar.

Demonstraţie. Presupunem că $|f(t,x)| \leq M$ pentru $(t,x) \in D$.

Problema Cauchy (4.1) este echivalentă cu ecuaţia integrală

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Dacă $t_1, t_2 \in (a,b)$, atunci:

$$|x(t_2) - x(t_1)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s))ds \right| \leq M|t_2 - t_1|,$$

inegalitate care, în baza teoremei lui Cauchy asupra limitelor de funcţii, implică existenţa limitelor laterale $x(a_+)$ şi $x(b_-)$. Acum, deoarece $(b, x(b_-)) \in D$ putem aplica din nou teorema lui Cauchy–Picard care stabileşte existenţa unei soluţii într-o vecinătate a punctului $t = b$ care coincide cu soluţia $x(\cdot)$ pentru $t < b$, din cauza unicităţii. ∎

Corolarul 4.1. *Fie sistemul de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi, liniare:*

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + b_i(t), \; i = 1, 2, ..., n,$$

unde funcţiile $a_{ij}(\cdot)$ şi $b_i(\cdot)$ sunt continue într-un interval I al axei reale.

Pentru orice $t_0 \in I$ şi orice numere reale α_i $(i = 1, 2, ..., n)$, sistemul admite o soluţie unică $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ care verifică condiţiile iniţiale $x_i(t_0) = \alpha_i$, $(i = 1, 2, ..., n)$.

Această soluţie este prelungibilă pe întregul interval I.

2.5 Probleme

Să se rezolve următoarele probleme Cauchy

1. $\begin{cases} x' = -x\cos t + \sin t \cos t \\ x(\pi) = 0; \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = \dfrac{2x^2 - tx}{t^2 - tx + x^2} \\ x(0) = 1; \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = \dfrac{tx}{t^2 - x^4} \\ x(1) = 1; \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = -2tx + 2te^{-t^2} \\ x(0) = 1; \end{cases}$

5. $\begin{cases} x''' = te^t \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0. \end{cases}$

6. Să se construiască primele trei aproximaţii succesive pentru soluţiile problemelor Cauchy

a) $\begin{cases} x' = t - \dfrac{x^2}{t} \\ x(1) = 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = tx - y^2 \\ y' = xy - 2 \\ x(0) = -2, \; y(0) = 1. \end{cases}$

7. Fie problema Cauchy

$$\begin{cases} x' = -x^2 & x(0) = 1 \\ y' = xy & y(0) = 5 \end{cases}$$

(i) Să se arate că această problemă are soluţie unică în orice interval care conţine originea.

(ii) Folosind metoda aproximaţiilor succesive să se afle soluţia sistemului.

8. Fie x şi y soluţiile problemelor Cauchy

$$\begin{cases} x' = \sqrt{x^2 - 1}, & x(0) = 1 \\ y' = \sqrt{y^2 + 1}, & y(0) = 0 \end{cases}$$

Presupunând că are loc teorema de existenţă şi unicitate să se arate că $x' = y$, $y' = x$ şi apoi să se rezolve cele două ecuaţii.

9. Să se construiască primele trei aproximaţii succesive pentru soluţiile problemelor Cauchy:

(i) $x' = t^2 + x^2, \; x(0) = 1;$

(ii) $x' = 3tx - 2e^{2x-1}, \; x(0) = \dfrac{1}{2}.$

10. Fie problema Cauchy

$$x'' + 2x' + \alpha x = 0, \; \alpha \in \mathbb{R}, \; x(0) = 0, \; x'(1) = 1.$$

Să se discute în funcţie de parametrul α existenţa soluţiei acestei probleme.

11. Să se arate că există un interval pentru care soluţiile problemelor Cauchy de mai jos există şi sunt unice. Să se determine apoi primele trei aproximaţii succesive pentru soluţiile acestor probleme.

a) $\begin{cases} x' = 3t + x^3 \\ x(0) = 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x'' - tx' = t^2 + x^2 \\ x(0) = 0, x'(0) = 1. \end{cases}$

Capitolul 3

Ecuaţii şi sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare. Transformata Laplace

3.1 Ecuaţii diferenţiale liniare

Definiţii

O ecuaţie de forma:

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t) \tag{1.1}$$

se numeşte *ecuaţie diferenţială liniară de ordinul* n. Peste tot în cele ce urmează vom presupune că funcţiile $a_1, ..., a_n$, f sunt continue pe un interval I, numit interval de definiţie al ecuaţiei diferenţiale. Dacă funcţia f este identic nulă pe I, ecuaţia (1.1) se numeşte *omogenă*, iar în caz contrar *neomogenă*. Fie $C^n(I)$ mulţimea funcţiilor derivabile de n ori pe intervalul I cu derivata de ordinul n continuă şi L operatorul definit pe $C^n(I)$ prin:

$$L(x) = x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x.$$

Remarcăm că acest operator este liniar adică verifică relaţiile:

$$L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2);\ L(cx) = cL(x),\ c \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Fie X o soluţie particulară a ecuaţiei (1.1). Dacă x este o soluţie oarecare a ecuaţiei (1.1) şi facem substituţia $x = X + y$ rezultă (deoarece $L(x) = L(X) + L(y) = f(t)$) că y verifică ecuaţia

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + a_2(t)y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = 0 \tag{1.3}$$

care se numeşte *ecuaţia omogenă asociată ecuaţiei* (1.1).

De aici rezultă că soluţia generală a ecuaţiei (1.1) se obţine ca suma dintre o soluţie particulară a ecuaţiei (1.1) şi soluţia generală a ecuaţiei (1.3).

Pe de altă parte, dacă $y_1, y_2, ..., y_k$ sunt k soluţii ale ecuaţiei (1.3) iar $c_i \in$ $\mathbb{R}$, $i = \overline{1,k}$, atunci şi $c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ky_k$ este soluţie a ecuaţiei (1.3). În mod firesc se pune întrebarea: câte soluţii particulare ale ecuaţiei (1.3) sunt necesare şi ce proprietăţi trebuie să aibă acestea pentru a putea obţine cu ajutorul lor orice soluţie a ecuaţiei (1.3). În acest scop sunt necesare câteva noţiuni care se introduc în paragraful următor.

Dependenţă şi independenţă liniară a unor funcţii

Un sistem de n funcţii $x_1, x_2, ..., x_n$, continue într-un interval I, se numesc *liniar dependente* în I dacă există constantele $c_1, c_2, ..., c_n$ nu toate nule, astfel încât pentru orice $t \in I$ să aibă loc egalitatea

$$c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t) = 0.$$

În caz contrar, spunem că sistemul de funcţii este *liniar independent*. Să observăm faptul că nu este uşor de verificat, cu ajutorul definiţiei, dependenţa sau independenţa liniară a unui sistem de funcţii. Acest lucru se dovedeşte a fi simplu dacă utilizăm noţiunea de wronskian.

Dacă funcţiile $x_1, x_2, ..., x_n$ sunt de clasă C^{n-1} pe intervalul I, determinantul

$$W(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1' & x_2' & \dots & x_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

se numeşte *wronskianul sistemului de funcţii.*

Să presupunem acum că $x_1, x_2, ..., x_n$ sunt soluţii ale ecuaţiei diferenţiale liniare şi omogene de ordinul n

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + a_2(t)x^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x = 0 \tag{1.4}$$

Dorim să verificăm dacă aceste funcţii sunt sau nu liniar independente.

Presupunând că sunt liniar dependente rezultă că există constantele $c_1, c_2, .., c_n$, nu toate nule astfel încât

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = 0 \quad \text{pe} \quad I. \tag{1.5}$$

Deoarece x_i sunt soluţii ale ecuaţiei (1.4) rezultă că există derivatele $x_i, x_i', ..., x_i^{(n-1)}$ iar relaţia (1.5) conduce, prin derivare succesivă, la sistemul

$$\begin{aligned} &c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = 0 \\ &c_1x_1' + c_2x_2' + \cdots + c_nx_n' = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &c_1x_1^{(n-1)} + c_2x_2^{(n-1)} + \cdots + c_nx_n^{(n-1)} = 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Sistemul (1.6) poate fi privit ca un sistem omogen de ecuaţii liniare în necunoscutele $c_1, c_2, ..., c_n$. Acest sistem are şi altă soluţie înafară de soluţia banală dacă şi numai dacă determinantul matricii sistemului este nul.

Ori aceasta înseamnă că în orice punct din I wronskianul funcţiilor $x_1, ..., x_n$ este nul. Cu alte cuvinte, am demonstrat următorul rezultat.

Teorema 1.1. *Soluţiile $x_1, x_2, ..., x_n$ ale ecuaţiei diferenţiale* (1.4) *sunt liniar independente pe I dacă şi numai dacă wronskianul lor $W(x_1, x_2, ..., x_n)$ este nenul în orice punct al intervalului I.*

Sistem fundamental de soluţii al unei ecuaţii liniare omogene

Fie ecuaţia

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + a_2(t)x^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0 \tag{1.7}$$

Teorema 1.2 (Liouville). *Fie $W(t)$ wronskianul unui sistem de n soluţii ale ecuaţiei* (1.1). *Atunci, are loc egalitatea*

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_1(s)ds\right), \ \forall\, t, t_0 \in I. \tag{1.8}$$

Demonstraţie. Pentru simplificarea scrierii vom lua $n = 3$; fie $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ trei soluţii ale ecuaţiei (1.7). Avem:

$$W(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{vmatrix}$$

Derivând acest determinant în raport cu t şi ţinând cont de regula de derivare a unui determinant şi de ecuaţia (1.7) pentru $n = 3$, avem:

$$\frac{dW}{dt} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & \cdots \\ x_1' & \cdots \\ -a_1(t)x_1'' - a_2(t)x_1' - a_3(t)x_1 & \cdots \end{vmatrix}$$

unde în ultimul determinant s-a scris numai prima coloană. Scriind acest determinant ca o sumă de trei determinanţi, doi dintre aceştia sunt nuli, având câte două linii proporţionale. În acest fel se obţine

$$\frac{dW}{dt} = -a_1(t)W,$$

care conduce la formula (1.8). Cazul general se tratează analog. ∎

Rezultatul stabilit în Teorema 1.2 permite introducerea noţiunii de sistem fundamental de soluţii.

Definiţia 1.1. Un sistem de n soluţii ale ecuaţiei (1.7) se numeşte *fundamental* dacă cel puţin într-un punct din I (de fapt pe tot intervalul) wronskianul lor nu se anulează.

Utilitatea sistemului fundamental de soluţii reiese din teorema următoare.

Teorema 1.3. *Dacă se cunoaşte un sistem fundamental de soluţii pentru* (1.7)*, orice altă soluţie este o combinaţie liniară a soluţiilor din sistemul fundamental.*

Demonstraţie. Dacă x este o soluţie a ecuaţiei (1.7) care în punctul $t_0 \in I$ satisface condiţiile

$$x(t_0) = q_0, x'(t_0) = q_1, ..., x^{(n-1)}(t_0) = q_{n-1},$$

este suficient să arătăm că există $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$x = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n.$$

Condiţiile iniţiale satisfăcute de x conduc la sistemul liniar algebric

$$\begin{array}{l} c_1x_1(t_0) + c_2x_2(t_0) + \cdots + c_nx_n(t_0) = q_0, \\ c_1x_1'(t_0) + c_2x_2'(t_0) + \cdots + c_nx_n(t_0) = q_1, \\ \vdots \\ c_1x_1^{(n-1)}(t_0) + c_2x_2^{(n-1)}(t_0) + \cdots + c_nx_n^{(n-1)}(t_0) = q_{n-1} \end{array}$$

care are o soluţie unică deoarece este un sistem de tip Cramer cu determinantul $W(t_0) \neq 0$, ceea ce încheie demonstraţia teoremei. ∎

Ecuaţii diferenţiale liniare neomogene

Presupunând că se cunoaşte un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia omogenă

$$(1.9) \qquad x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0$$

utilizând metoda variaţiei constantelor (Lagrange) se poate obţine (prin cuadraturi) o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene

$$(1.10) \qquad x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t).$$

Schiţăm (pentru simplitate) cum se face acest lucru pentru cazul $n = 3$.

Pentru aceasta, presupunem că x_1, x_2, x_3 formează un sistem fundamental de soluţii pentru (1.9). Soluţia generală a ecuaţiei (1.9) va fi dată de

$$(1.11) \qquad x = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3,\ \ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Metoda *variaţiei constantelor* constă în a considera pe c_1, c_2, c_3 ca funcţii de variabilă independentă t şi a le determina astfel încât $x = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) + c_3(t)x_3(t)$ să fie o soluţie a ecuaţiei (1.10). În acest scop impunem funcţiilor c_1, c_2, c_3 să satisfacă împreună cu x_1, x_2, x_3 sistemul

$$(1.12) \qquad \begin{array}{l} c_1'x_1 + c_2'x_2 + c_3'x_3 = 0 \\ c_1'x_1' + c_2'x_2' + c_3'x_3' = 0 \\ c_1'x_1'' + c_2'x_2'' + c_3'x_3'' = f(t). \end{array}$$

Deoarece wronskianul funcţiilor x_1, x_2, x_3 nu se anulează în intervalul I rezultă că sistemul (1.12) este un sistem Cramer cu soluţie unică pentru orice $t \in I$. Funcţiile $c_1(\cdot), c_2(\cdot), c_3(\cdot)$ se obţin prin cuadraturi, apoi cu ajutorul lor se obţine soluţia particulară

$$(1.13) \qquad x(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) + c_3(t)x_3(t)$$

a ecuaţiei (1.10) pentru $n = 3$. Rezultă că soluţia generală a ecuaţiei (1.10) va fi dată de suma dintre soluţia generală (1.11) a ecuaţiei (1.9) şi soluţia particulară (1.13) a ecuaţiei (1.10).

Exemplu. Studiul încovoierii unei plăci subţiri, circulare, încastrate pe contur şi supusă unei sarcini concentrate în centrul ei se face prin intermediul ecuaţiei diferenţiale

$$x^2\frac{d^2\varphi}{dx^2} + x\frac{d\varphi}{dx} - \varphi = kx,\ \ x \in (0, r],$$

unde $k = const$. Să se determine soluţia care satisface condiţiile limită, $\lim_{x\to 0} \varphi(x) = 0$, $\varphi(r) = 0$, ştiind că ecuaţia omogenă admite soluţia particulară $\varphi_1(x) = x$.

Soluţie. Luând ecuaţia omogenă asociată

$$x^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} + x\frac{d\varphi}{dx} - \varphi = 0$$

şi făcând substituţia $\varphi(x) = xy(x)$, obţinem pentru y ecuaţia $xy'' + 3y' = 0$ care dă soluţia particulară $y(x) = \frac{1}{x^2}$, deci $\varphi_2(x) = \frac{1}{x}\cdot$

Deoarece wronskianul soluţiilor φ_1, φ_2 este diferit de zero pe $(0, r]$, rezultă că acestea sunt liniar independente, deci soluţia generală a ecuaţiei omogene este

$$\varphi(x) = c_1 x + c_2\frac{1}{x},\ x \in (0, r].$$

Pentru ecuaţia neomogenă se caută o soluţie particulară prin metoda variaţiei constantelor şi se găseşte

$$\begin{cases} c_1' = \dfrac{k}{2x} \\ c_2' = \dfrac{-k}{2}x \end{cases}$$

deci $c_1(x) = \frac{k}{2}\ln x$, $c_2(x) = \frac{-k}{4}x^2$ şi $\varphi_p(x) = \frac{kx}{2}\ln x - \frac{k}{4}x$, $x \in (0, r]$, iar soluţia generală a ecuaţiei neomogene este

$$\varphi(x) = \left(\frac{k}{2}\ln x + c_1\right)x + \left(c_2 - \frac{k}{4}x^2\right)\frac{1}{x},\ x \in (0, r].$$

Condiţiile la limită implică $c_1 = \frac{-k}{2}\ln r + \frac{k}{4}$, $c_2 = 0$ care determină soluţia $\varphi(x) = \frac{kx}{2}\ln\frac{x}{r}$, $x \in (0, r]$.

Ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

Pentru început ne ocupăm de găsirea unui sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia diferenţială

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x = 0 \tag{1.14}$$

unde $a_1, a_2, ..., a_n$ sunt constante reale.

Se caută o soluţie particulară de forma $e^{\lambda t}$; calculând derivatele succesive ale acestei funcţii şi înlocuind în (1.14) se obţine:

$$e^{\lambda t}(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n) = 0 \tag{1.15}$$

Polinomul

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

se numeşte *polinomul caracteristic* ataşat ecuaţiei diferenţiale (1.14) iar

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{1.16}$$

ecuaţia caracteristică corespunzătoare acestei ecuaţii diferenţiale.

Din (1.15) rezultă că $e^{\lambda t}$ este soluţie a ecuaţiei (1.14) dacă şi numai dacă λ este rădăcină a ecuaţiei caracteristice ataşate.

După cum se ştie, teorema fundamentală a algebrei afirmă că ecuaţia caracteristică admite, în cazul numerelor complexe, exact n rădăcini. Problema determinării efective a acestora nu este însă întotdeauna simplă.

În continuare analizăm cazurile care apar în rezolvarea ecuaţiei (algebrice) caracteristice (1.16).

Cazul I. Ecuaţia caracteristică are rădăcini distincte, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Corespunzător, se obţin n soluţii ale ecuaţiei diferenţiale (1.14):

$$x_1 = e^{\lambda_1 t}, x_2 = e^{\lambda_2 t}, ..., x_n = e^{\lambda_n t},$$

fie că rădăcinile distincte ale ecuaţiei caracteristice sunt reale sau complexe.

Calculând wronskianul acestui sistem de soluţii în punctul $t = 0$ găsim $W(0) = \prod\limits_{1\leq i<j\leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$ care este nenul, deci sistemul este independent.

Soluţia generală a ecuaţiei (1.14) este

$$x(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_ne^{\lambda_n t}$$

care arată că este definită pe toată axa reală.

Dacă ecuaţia (1.16) are rădăcini complexe, ele sunt grupate în perechi conjugate, $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ etc.

Soluţiile $e^{\lambda_1 t}$ şi $e^{\lambda_2 t}$ pot fi înlocuite cu

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}\cos\beta t &= \frac{1}{2}\left(e^{(\alpha+\beta i)t} + e^{(\alpha-\beta i)t}\right) \\ e^{\alpha t}\sin\beta t &= \frac{1}{2i}\left(e^{(\alpha+\beta i)t} - e^{(\alpha-\beta i)t}\right) \end{aligned} \tag{1.17}$$

care sunt şi ele liniar independente.

În consecinţă, în cazul în care ecuaţia caracteristică admite rădăcini distincte soluţia generală se obţine ca o combinaţie liniară de exponenţiale şi expresii de forma (1.17).

Cazul II. Ecuaţia caracteristică are rădăcini multiple. Fie L operatorul diferenţial liniar

$$L(x) = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x.$$

Utilizând formula lui Leibniz de derivare a produsului a două funcţii, se stabileşte uşor formula

$$L(ye^{\lambda t}) = e^{\lambda t}\left(yP_{(\lambda)} + y'\frac{P'_{(\lambda)}}{1!} + \cdots + y^{(n)}\frac{P^{(n)}_{(\lambda)}}{n!}\right). \tag{1.18}$$

Să presupunem că λ_1 este rădăcină multiplă a ecuaţiei caracteristice, de ordinul de multiplicitate $m_1 \leq n$, deci că:

$$P(\lambda_1) = P'(\lambda_1) = \cdots = P^{(m_1-1)}(\lambda_1) = 0, \text{ iar } P^{(m_1)}(\lambda_1) \neq 0.$$

Având în vedere formula (1.18), ecuaţia diferenţială $L(ye^{\lambda_1 t}) = 0$ devine:

$$y^{(m_1)}\frac{P^{(m_1)}(\lambda_1)}{m_1!} + y^{(m_1+1)}\frac{P^{(m_1+1)}(\lambda_1)}{(m_1+1)!} + \cdots + y^{(n)}\frac{P^{(n)}(\lambda_1)}{n!} = 0$$

şi admite ca soluţie particulară un polinom de gradul $(m_1 - 1)$ în t. Deci, corespunzător rădăcinii λ_1 de ordin m_1 de multiplicitate, ecuaţia (1.14) admite o soluţie de forma:

$$e^{\lambda_1 t}(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{m_1-1}t^{m_1-1}),$$

adică m_1 soluţii de forma:

$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, t^2 e^{\lambda_1 t}, ..., t^{m_1-1}e^{\lambda_1 t}.$$

Presupunând că ecuaţia caracteristică are rădăcinile distincte $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ cu multiplicităţile $m_1, m_2, ..., m_k$ $(m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n)$ din raţionamentul de mai sus, rezultă că ecuaţia diferenţială (1.14) admite soluţiile

$$e^{\lambda_1 t}P_1(t), e^{\lambda_2 t}P_2(t), ..., e^{\lambda_k t}P_k(t), \tag{1.19}$$

unde $P_1(t)$, $P_2(t), ...,$ $P_k(t)$ sunt polinoame de grade (m_1-1), $(m_2-1), ...,$ (m_k-1), conţinând în total $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$ constante arbitrare, adică

n soluţii ale ecuaţiei diferenţiale. În final, arătăm că cele n soluţii formează un sistem fundamental. Pentru aceasta este suficient să demonstrăm:

Lema 1.1. *Dacă*

$$Q_1(t)e^{\lambda_1 t} + Q_2(t)e^{\lambda_2 t} + \cdots + Q_k(t)e^{\lambda_k t} = 0,\ \forall\, t \in \mathbb{R} \tag{1.20}$$

unde $Q_i(t)$ sunt polinoame cu coeficienţi reali sau complecşi, iar $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ sunt numere reale sau complexe diferite între ele, atunci toate polinoamele Q_i, $i = 1, 2, ..., k$ sunt identic nule.

Demonstraţie. Cazul $k = 1$ este banal deoarece exponenţiala este diferită de zero în orice punct.

Presupunând acum $k \geq 2$, relaţia (1.20) este echivalentă cu

$$Q_1(t) + Q_2(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_1 t)} + \cdots + Q_k(t)e^{(\lambda_k - \lambda_1)t} = 0. \tag{1.21}$$

Derivând în raport cu t membrul drept al relaţiei (1.21), gradul lui $Q_1(t)$ se reduce cu o unitate, iar ceilalţi termeni rămân de aceeaşi formă, deoarece:

$$\frac{d}{dt}\left(Q_i(t)e^{(\lambda_i - \lambda_1)t}\right) = \left(Q_i'(t) + (\lambda_i - \lambda_1)Q_i(t)\right)e^{(\lambda_i - \lambda_1)t}.$$

Dacă gradul polinomului $Q_1(t)$ este m şi derivăm relaţia (1.21) de $(m+1)$ ori, se obţine o identitate de forma:

$$R_1(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + R_2(t)e^{(\lambda_3 - \lambda_1)t} + \cdots + R_{k-1}(t)e^{(\lambda_k - \lambda_1)t} = 0,$$

în care toţi exponenţii $(\lambda_i - \lambda_1)$ sunt diferiţi între ei, iar polinoamele $R_1(t), ...,$ $R_{k-1}(t)$ nu sunt toate identic nule. Continuând în acelaşi mod, se ajunge la o identitate cu un singur termen care, aşa cum am văzut în cazul $k = 1$, conduce la o imposibilitate; rezultă că cele n soluţii cuprinse în (1.19) formează un sistem fundamental. Dacă ecuaţia caracteristică are rădăcini complexe multiple, se procedează la fel ca în cazul I. ∎

De exemplu, dacă $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta_i$ sunt rădăcini multiple de ordin q $(2q \leq n)$, relativ la aceste rădăcini, obţinem soluţiile reale

$$e^{\alpha t}(P_1(t)\cos\beta t + Q_1(t)\sin\beta t),$$

unde $P_1(t)$ şi $Q_1(t)$ sunt polinoame de gradul $q - 1$, adică în total $2q$ soluţii particulare, deoarece în expresia precedentă intervin $2q$ constante arbitrare. Sintetizând, am obţinut următorul rezultat:

Teorema 1.4. *Dacă ecuaţia caracteristică* (1.16) *are rădăcinile reale* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ *cu ordinele de multiplicitate* $m_1, m_2, ..., m_p$ *şi rădăcinile complexe* $\alpha_1 \pm i\beta_1,\ \alpha_2 \pm i\beta_2, ..., \alpha_q \pm i\beta_q$ *cu ordinele de multiplicitate* $s_1, s_2, ..., s_q$ *unde* $m_1 + m_2 + \cdots + m_p + 2(s_1 + s_2 + \cdots + s_q) = n$, *atunci următorul sistem de funcţii este un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia diferenţială* (1.14)

$$
\begin{array}{l}
e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, ..., t^{m_1-1}e^{\lambda_1 t} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
e^{\lambda_{m_p} t}, te^{\lambda_{m_p} t}, ..., t^{m_p-1}e^{\lambda_{m_p} t} \\
e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, te^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, ..., t^{s_1-1}e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t \\
e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, te^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, ..., t^{s_1-1}e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
e^{\alpha_q t}\cos\beta_q t, te^{\alpha_q t}\cos\beta_q t, ..., t^{s_q-1}e^{\alpha_q t}\cos\beta_q t \\
e^{\alpha_q t}\sin\beta_q t, te^{\alpha_q t}\sin\beta_q t, ..., t^{s_q-1}e^{\alpha_q t}\sin\beta_q t.
\end{array}
$$

În cazul în care membrul drept al ecuaţiei cu coeficienţi constanţi are o formă specială (funcţie exponenţială sau trigonometrică) soluţia particulară a ecuaţiei neomogene se poate căuta sub aceeaşi formă.

Exemplu. Să se determine câte o soluţie particulară pentru ecuaţiile

(i) $x'' - 5x' + 6x = 2e^{4t}$

(ii) $x'' - 5x' + 6x = \cos 2t$.

Rezolvare. i) Deoarece membrul drept conţine drept factor e^{4t} căutăm o soluţie de forma $x_p = ce^{4t}$ unde c este o constantă. Introducând în (1.14) obţinem:

$$x_p'' - 5x_p' + 6x_p = 2e^{4t},$$

şi făcând calculele $2ce^{4t} = 2e^{4t}$, de unde $c = 1$, astfel că $x_p = e^{4t}$.

ii) Procedând ca mai sus căutăm $x_p = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$ care, introdusă în ecuaţie conduce la $\cos 2t = (2c_1 - 10c_2)\cos 2t + (10c_1 + 2c_2)\sin 2t$, soluţie care are loc pentru orice t real şi care conduce la sistemul

$$\begin{cases} 2c_1 - 10c_2 = 1 \\ 10c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases}$$

care are soluţia $c_1 = 1/52,\ c_2 = -5/52$.

Observaţie. Atragem atenţia că, deşi simplă din punct de vedere calculatoriu, această metodă (numită şi *metoda coeficienţilor nedeterminaţi*), spre deosebire de metoda variaţiei constantelor, nu funcţionează întotdeauna.

3.2 Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare

În acest capitol facem o scurtă prezentare a sistemelor de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi, sisteme ce sunt utilizate în foarte multe probleme cu caracter practic sau teoretic.

Definiţii şi rezultate generale

Un sistem de ecuaţii diferenţiale de forma

$$x_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t) + b_i(t),\ i = 1, 2, ..., n,\ t \in I \tag{2.1}$$

unde a_{ij} şi b_i $(i, j = 1, 2, ..., n)$ sunt funcţii reale şi continue pe un interval real I se numeşte *sistem diferenţial liniar de ordinul întâi neomogen.*

Funcţiile a_{ij} se numesc *coeficienţii sistemului.* Dacă $b_i \equiv 0$, $i = 1, 2, ..., n$, atunci sistemul (2.1) capătă forma

$$x_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t),\ i = 1, 2, ..., n,\ t \in I$$

şi se numeşte *omogen.*

Notând

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},\ b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

sistemul (2.1) este echivalent cu ecuaţia diferenţială de ordinul întâi liniară vectorială

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t).$$

După cum se ştie din Capitolul 1, problema Cauchy asociată sistemului (2.1) admite soluţie unică; cu alte cuvinte, pentru orice $t_0 \in I$ şi $x_0 \in \mathbb{R}^n$ există o soluţie unică a sistemului (2.1) care verifică condiţia iniţială $x(t_0) = x_0$. În plus, domeniul de existenţă al acestei soluţii coincide cu intervalul I.

Sisteme omogene. Spaţiul soluţiilor

Să considerăm sistemul omogen

$$x'(t) = A(t)x(t) \tag{2.2}$$

în ipotezele asupra coeficienţilor, menţionate în paragraful precedent.
Un prim rezultat se referă la structura mulţimii soluţiilor sistemului (2.2).

Teorema 2.1. *Mulţimea soluţiilor sistemului omogen* (2.2) *este un spaţiu liniar de dimensiune* n *peste* $\mathbb{R}$.

Demonstraţie. Este uşor de verificat faptul că mulţimea soluţiilor sistemului (2.2) formează un spaţiu liniar peste $\mathbb{R}$; adică suma a două soluţii şi produsul unei soluţii cu un scalar sunt tot soluţii. Pentru dimensiune, vom pune în evidenţă un izomorfism între spaţiul S al soluţiilor şi spaţiul $\mathbb{R}^n$. În acest scop definim aplicaţia (operatorul) $\Gamma : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ prin

$$\Gamma x = x(t_0)$$

unde t_0 este un punct fixat în I. Din teorema de existenţă şi unicitate (Teorema 2.1, Cap.2) pentru problema Cauchy asociată sistemului (2.2) rezultă că operatorul Γ este surjectiv şi injectiv adică bijectiv. Cum, evident, el este şi liniar, rezultă că este izomorfism adică ceea ce trebuia arătat. ∎

Din Teorema 2.1 rezultă că spaţiul S al soluţiilor sistemului (2.2) admite o bază formată din n elemente. Fie $x^1, x^2, ..., x^n$ vectorii acestei baze. Rezultă că orice soluţie a sistemului poate fi scrisă ca o combinaţie liniară a vectorilor din bază. Matricea $X(t)$ ale cărei coloane sunt vectorii $x^1(t), x^2(t), ..., x^n(t)$ din bază se numeşte *matrice fundamentală*. Aşadar, dacă x este soluţie a sistemului omogen (2.2) iar X este o matrice fundamentală a acestui sistem, atunci există $c \in \mathbb{R}^n$ astfel încât

$$x(t) = X(t)c, \ \forall\, t \in I. \tag{2.3}$$

Matricea fundamentală satisface ecuaţia diferenţială

$$X'(t) = A(t)X(t), \ t \in I,$$

unde cu $X'(t)$ am notat matricea ce are ca elemente derivatele elementelor matricii $X(t)$.

După cum este cunoscut, baza unui spaţiu liniar nu este unică, prin urmare nici matricea fundamentală a sistemului (2.2) nu va fi unică. Este uşor de demonstrat că orice altă matrice fundamentală se obţine prin înmulţirea lui $X(t)$ cu o matrice constantă nesingulară.

Fie acum $x^1, x^2, ..., x^n$ soluţii ale sistemului omogen (2.2). Matricea $X(t)$ ce are drept coloane aceste soluţii se numeşte *matrice Wronski* iar determinatul său $W(t) = \det X(t)$ se numeşte *wronskianul* sistemului de soluţii

$\{x^1(t), x^2(t), ..., x^n(t)\}$. Importanţa wronskianului este dată de rezultatul care urmează.

Teorema 2.2. *Condiţia necesară şi suficientă ca n soluţii ale sistemului diferenţial liniar omogen (2.2) să constituie un sistem fundamental este ca să existe $t_0 \in I$, în care $W(t_0) \neq 0$ şi în acest caz $W(t) \neq 0$ pentru orice $t \in I$. În plus are loc relaţia (Liouville):*

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}[a_{11}(s)+a_{22}(s)+\cdots+a_{nn}(s)]ds},\ t \in I. \tag{2.4}$$

Demonstraţie. Prima afirmaţie din teoremă rezultă din definiţia sistemului fundamental. În ceea ce priveşte relaţia (2.4) vom da, la fel ca în cazul ecuaţiilor diferenţiale liniare, o demonstraţie pentru cazul $n = 3$. Fie deci $\{x^1, x^2, x^3\}$ un sistem de soluţii pentru (1.2). Avem:

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & x_1^3(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) & x_2^3(t) \\ x_3^1(t) & x_3^2(t) & x_3^3(t) \end{vmatrix}.$$

Calculând derivata lui $W(t)$ după regula de derivare a determinanţilor obţinem (2.5)

$$W'(t) = \begin{vmatrix} (x_1^1)'(t) & (x_1^2)'(t) & (x_1^3)'(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) & x_2^3(t) \\ x_3^1(t) & x_3^2(t) & x_3^3(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & x_1^3(t) \\ (x_2^1)'(t) & (x_2^2)'(t) & (x_2^3)'(t) \\ x_3^1(t) & x_3^2(t) & x_3^3(t) \end{vmatrix} +$$
$$+ \begin{vmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & x_1^3(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) & x_2^3(t) \\ (x_3^1)'(t) & (x_3^2)'(t) & (x_3^3)'(t) \end{vmatrix}.$$

Apoi, deoarece $x^i = \begin{pmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ x_3^i \end{pmatrix}$, $i = 1, 2, 3$ este soluţie a sistemului (2.2), $(x_j^i)' = \sum\limits_{k=1}^{3} a_{jk}x_k^i$.

Înlocuind această ultimă relaţia în (2.5) şi ţinând cont de regulile de dezvoltare ale determinanţilor rezultă

$$W'(t) = (a_{11}(t) + a_{22}(t) + a_{33}(t))W(t)$$

care prin integrare conduce la formula (2.4). ■

Exemplu. Să se rezolve sistemul diferenţial

$$\begin{cases} x' = x - y + z \\ y' = x + y - z \\ z' = -y + 2z \end{cases}$$

Ecuaţia caracteristică este

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda-1)^2$$

care are rădăcinile $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Relativ la $\lambda = 2$, soluţia sistemului este

i) $x = c_1 e^{2t},\ y = c_2 e^{2t},\ z = c_3 e^{2t}$

iar pentru $\lambda = 1$, rădăcină dublă

ii) $x = (c_4 + c_5 t)e^t,\ y = (c_6 + c_7 t)e^t,\ z = (c_8 + c_9 t)e^t$

Soluţiile i) şi ii) depind aparent de nouă constante arbitrare $c_1, c_2, ..., c_9$, dar de fapt numai de trei, după cum se va constata imediat. Într-adevăr, introducând în sistem soluţia (i) şi identificând, obţinem

$$c_2 = c_3,\ c_1 = 0;$$

apoi, introducând soluţia (ii), găsim

$$c_5 = c_7 = c_9,\ c_4 - c_8 = c_7,\ c_6 - c_8 = -c_9$$

Notând $c_2 = c_3 = \alpha,\ c_5 = c_7 = c_9 = \beta,\ c_4 = \gamma$, din relaţiile anterioare, obţinem $c_6 = \gamma - 2\beta$, $c_8 = \gamma - \beta$, iar soluţia generală a sistemului este:

$$\begin{aligned} x(t) &= (\gamma + \beta t)e^t + \alpha e^{2t} \\ y(t) &= (\gamma - 2\beta + \beta t)e^t \\ z(t) &= (\gamma - \beta + \beta t)e^t + \alpha e^{2t}, \end{aligned}$$

unde α, β, γ sunt trei constante arbitrare.

Sisteme neomogene

Fie sistemul diferenţial de ordinul întâi liniar, neomogen

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \tag{2.6}$$

unde $A(t)$ este o matrice de ordinul n ale cărei elemente sunt funcţii continue pe intervalul I, iar $b(t)$ este un vector coloană cu n elemente, de asemenea funcţii continue pe I. Fie

$$x'(t) = A(t)x(t) \tag{2.7}$$

sistemul omogen asociat sistemului (2.6).

La fel ca în cazul ecuaţiei diferenţiale liniare vom arăta că soluţia generală a sistemului neomogen (2.6) este dată de suma dintre o soluţie particulară a sa şi soluţia generală a sistemului omogen asociat (2.7).

Teorema 2.3. *Fie X o matrice fundamentală a sistemului* (2.7) *şi fie y o soluţie particulară a sistemului* (2.6)*. Atunci x este soluţie a sistemului* (2.6) *dacă şi numai dacă este de forma*

$$x(t) = X(t)c + y(t),\ \forall\, t \in I \tag{2.8}$$

unde $c \in \mathbb{R}^n$.

Demonstraţie. Fie x de forma (2.8). Derivând, obţinem

$$\begin{aligned} x'(t) &= X'(t)c + y'(t) = A(t)X(t)c + A(t)y(t) + b(t) = \\ &= A(t)(X(t)c + y(t)) + b(t) = A(t)x(t) + b(t) \end{aligned}$$

ceea ce arată că x este soluţie a sistemului neomogen. Reciproc, să arătăm că dacă x este soluţie a sistemului neomogen atunci există $c \in \mathbb{R}^n$ astfel că x se poate reprezenta sub forma (2.8). Într-adevăr, dacă y este o soluţie particulară a sistemului (2.6), atunci

$$\begin{aligned} z'(t) &= (x(t) - y(t))' = A(t)x(t) + b(t) - A(t)y(t) - b(t) = \\ &= A(t)(x(t) - y(t)) = A(t)z(t) \end{aligned}$$

adică $z = x - y$ satisface sistemul omogen (2.7), deci conform relaţiei (2.3) există $c \in \mathbb{R}^n$ astfel încât $z = x - y = Xc$, adică ceea ce trebuia arătat. ∎

Teorema care urmează arată cum poate fi scrisă soluţia generală a sistemului neomogen utilizând doar matricea fundamentală a sistemului omogen corespunzător.

Teorema 2.4. *Dacă X este o matrice fundamentală a sistemului omogen* (2.7)*, atunci soluţia generală a sistemului neomogen* (2.6) *se reprezintă sub forma*

$$x(t) = X(t)c + \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)b(s)ds,\ t \in I \tag{2.9}$$

unde $c \in \mathbb{R}^n$ şi $t_0 \in I$.

Demonstraţie. Plecând de la formula (2.8) căutăm, pentru sistemul neomogen, o soluţie particulară y de forma

$$y(t) = X(t)\alpha(t),\ t \in I \tag{2.10}$$

unde $\alpha(t)$ este o funcţie vectorială ce urmează a fi determinată. Diferenţiind (2.10), rezultă

$$X'(t)\alpha(t) + X(t)\alpha'(t) = A(t)X(t)\alpha(t) + X(t)\alpha'(t) = A(t)X(t)\alpha(t) + b(t)$$

de unde (X fiind matrice fundamentală deci nesingulară pentru orice $t \in I$) se obţine

$$\alpha'(t) = X^{-1}(t)b(t),\ t \in I,$$

adică putem lua

$$\alpha(t) = \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)b(s)ds,\ t \in I,$$

t_0 fiind un element arbitrar, fixat din I. ∎

Observaţii.

(i) Formula (2.9) mai este cunoscută sub numele de *formula variaţiei constantelor* (a lui Lagrange) nume datorat faptului că soluţia particulară a sistemului neomogen se caută înlocuind constanta c ce apare în reprezentarea soluţiei generale a sistemului omogen cu o funcţie ce variază odată cu timpul.

(ii) Dacă ataşăm sistemului neomogen (2.6) condiţia Cauchy $x(t_0) = x_0$, formula (2.9) capătă forma

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)b(s)ds,\ t \in I.$$

Exemplu. Fie sistemul liniar neomogen:

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{t(t^2+1)}x + \dfrac{1}{t^2(t^2+1)}y + \dfrac{1}{t} \\ \\ y' = -\dfrac{t^2}{t^2+1}x + \dfrac{2t^2+1}{t(t^2+1)}y - 1. \end{cases} \tag{2.11}$$

Sistemul omogen asociat este

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{t(t^2+1)}x + \dfrac{1}{t^2(t^2+1)}y \\ \\ y' = -\dfrac{t^2}{t^2+1}x + \dfrac{2t^2+1}{t(t^2+1)}y, \end{cases} \tag{2.12}$$

care se verifică imediat că admite soluţia $(1, t)$.

Facem substituţia:

$$x = X;\ y = tX + Y$$

şi obţinem, pentru noile necunoscute

$$X' = \frac{Y}{t^2(t^2+1)};\ Y' = \frac{2t}{t^2+1}Y$$

sistem care are soluţia $\left(-\dfrac{1}{t}, t^2+1\right)$ ceea ce conduce la faptul că sistemul (2.12) are soluţia $\left(-\dfrac{1}{t}, t^2\right)$, deci integrala generală a sistemului (2.12) este

$$\begin{cases} x = c_1 - \dfrac{c_2}{t} \\ \\ y = c_1 t + c_2 t^2. \end{cases}$$

Pentru a obţine o soluţie particulară a sistemului (2.11), aplicăm metoda variaţiei constantelor obţinând pentru c_1, c_2, considerate acum ca variabile, sistemul

$$\begin{cases} c_1' - \dfrac{c_2'}{t} = \dfrac{1}{t} \\ c_1' t + c_2' t^2 = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1' = \dfrac{t^2-1}{t(t^2+2)} \\ c_2' = -\dfrac{2}{t^2+1}, \end{cases}$$

şi deci, $c_1(t) = \ln\left|\dfrac{t^2+1}{t}\right|$, $c_2(t) = -2\,\mathrm{arctg}\,t$ iar soluţia generală a sistemului (2.11) este

$$\begin{cases} x(t) = c_1 - \dfrac{c_2}{t} + \ln\left|\dfrac{t^2+1}{t}\right| + \dfrac{2}{t}\,\mathrm{arctg}\,t \\[2ex] y(t) = c_1 t + c_2 t^2 + t\ln\left|\dfrac{t^2+1}{t}\right| - 2t^2\,\mathrm{arctg}\,t, \end{cases}$$

c_1, c_2 fiind două constante reale.

Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

Vom studia acum sistemul diferenţial liniar (omogen)

$$x'(t) = Ax(t),\ \ t \in \mathbb{R} \tag{2.13}$$

unde x este un vector n dimensional iar $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ este o matrice constantă. În notaţia scalară sistemul (2.13) devine

$$x_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t),\ \ i = 1,2,...,n;\ \ t \in \mathbb{R}. \tag{2.14}$$

Vom arăta că, pentru sistemul (2.13), la fel ca în cazul ecuaţiilor diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi, putem pune în evidenţă un sistem fundamental de soluţii.

În acest scop căutăm o soluţie *nebanală* cu componentele de forma $x_i(t) = \alpha_i e^{\lambda t}$, unde α_i şi λ sunt parametri ce urmează a fi determinaţi.

Înlocuind în (2.14), obţinem sistemul liniar algebric în necunoscutele $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$:

$$\begin{cases} \alpha_1(a_{11}-\lambda) + \alpha_2 a_{12} + \cdots + \alpha_n a_{1n} = 0 \\ \alpha_1 a_{21} + \alpha_2(a_{22}-\lambda) + \cdots + \alpha_n a_{2n} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1 a_{n1} + \alpha_2 a_{n2} + \cdots + \alpha_n(a_{nn}-\lambda) = 0. \end{cases} \tag{2.15}$$

Sistemul (2.15) admite soluţii nebanale dacă şi numai dacă λ este rădăcină a *ecuaţiei caracteristice* $\det(\lambda I - A) = 0$, asociate matricii A.

Ajunşi în acest punct să observăm faptul că se poate face o analogie între sistemele diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi şi ecuaţiile diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi.

Presupunem că

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Teorema lui Cayley din algebra liniară afirmă că matricea A este ”soluţie” a propriei sale ecuaţii caracteristice adică

$$A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_nI = O \tag{2.16}$$

unde O este matricea nulă.

Din (2.16) rezultă că orice vector n-dimensional x satisface ecuaţia

$$A^nx + a_1A^{n-1}x + \cdots + a_{n-1}Ax + a_nIx = 0. \tag{2.17}$$

Apoi, dacă x este soluţie a sistemului (2.13) atunci este infinit diferenţială şi satisface relaţia $x^{(k)} = A^kx$, pentru orice număr natural k, $k \geq 1$. Ţinând cont de această observaţie şi revenind la relaţia (2.17) dacă x este soluţie a sistemului diferenţial (2.13) atunci:

$$x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_nx = 0, \tag{2.18}$$

adică vectorul x este soluţie a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n cu coeficienţi constanţi.

De fapt, relaţia (2.18) arată că fiecare componentă a vectorului x satisface aceeaşi ecuaţie diferenţială liniară scalară.

Prin urmare, este justificat să căutăm drept soluţii pentru sistemul (2.13), vectori ce au componente funcţii exponenţiale.

Cazul 1. Ecuaţia caracteristică $\det(\lambda I - A) = 0$ **are rădăcini distincte** $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Pentru rădăcina λ_1 a ecuaţiei caracteristice, sistemul algebric liniar omogen (2.15) are cel puţin o soluţie nebanală $(\alpha_{11}, \alpha_{21}, ..., \alpha_{n1})$, unde al doilea indice marchează faptul că necunoscutele α_{i1}, $i = \overline{1,n}$ din sistemul algebric (2.15) corespund la $\lambda = \lambda_1$. Procedând în acelaşi mod pentru $\lambda_2, ..., \lambda_n$, vom obţine pentru sistemul (2.13) următoarele n soluţii:

$$\begin{gathered} x^1(t) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_{21}e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \alpha_{n1}(t)e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}, x^2(t) = \begin{pmatrix} \alpha_{12}e^{\lambda_2 t} \\ \alpha_{22}e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ \alpha_{n2}(t)e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}, ..., \\ x^n(t) = \begin{pmatrix} \alpha_{1n}e^{\lambda_n t} \\ \alpha_{2n}e^{\lambda_n t} \\ \vdots \\ \alpha_{nn}(t)e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{2.19}$$

În continuare arătăm că sistemul de soluţii (2.19) *este fundamental*. Dacă nu ar fi aşa, atunci există constantele $c_1, c_2, ..., c_n$ nu toate nule, astfel încât

$$c_1x^1(t) + c_2x^2(t) + \cdots + c_nx^n(t) = 0, \ \forall\, t \in \mathbb{R}$$

de unde rezultă că şi pe componente are loc

$$c_1\alpha_{i1}e^{\lambda_1 t} + c_2\alpha_{i2}e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\alpha_{in}e^{\lambda_n t} = 0, \ \forall\, t \in \mathbb{R}, \ \forall\, i = \overline{1, n}.$$

Această egalitate conduce, conform Teoremei 1.4, la relaţia

$$c_1\alpha_{i1} = c_2\alpha_{i2} = \cdots = c_n\alpha_{in} = 0, \ \forall\, i = \overline{1, n}.$$

Însă cum măcar un c_j este nenul, fie acesta c_1, ar rezulta că $\alpha_{i1} = 0$, pentru $i = 1, 2, ..., n$, ceea ce contrazice faptul că $(\alpha_{11}, \alpha_{21}, ..., \alpha_{n1})$ este o soluţie nebanală a sistemului algebric (2.15) pentru $\lambda = \lambda_1$.

Deci, sistemul (2.19) este fundamental şi ca atare soluţia generală a sistemului diferenţial (2.13) are componentele:

$$x_i(t) = c_1\alpha_{i1}e^{\lambda_1 t} + c_2\alpha_{i2}e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\alpha_{in}e^{\lambda_n t},$$

unde $c_1, c_2, ..., c_n$ sunt n constante arbitrare.

Observaţie. Dacă ecuaţia caracteristică are rădăcini complexe $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\overline{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$ în sistemul (2.19) vom înlocui vectorii soluţii complexe x^1 şi x^2 cu

$$\frac{x^1 + x^2}{2}; \ \frac{x^1 - x^2}{2i}$$

şi noul sistem de vectori soluţii rămâne liniar independent.

Cazul 2. Ecuaţia caracteristică are rădăcini multiple. Să presupunem că ecuaţia caracteristică are rădăcinile distincte $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ ($(k < n)$ de multiplicităţi $m_1, m_2, ..., m_k$ unde $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$.

În acest caz, aşa cum rezultă din Teorema 1.4, funcţiile $t^m e^{\lambda_j t}$, $m = 0, 1, ..., m_j - 1$, $j = 1, 2, ..., k$, formează un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia (2.18) iar soluţia generală a sistemului (2.13) are forma (vectorul soluţie dat pe componente):

$$\begin{aligned} x_1(t) &= P_{11}(t)e^{\lambda_1 t} + P_{12}e^{\lambda_2 t} + \cdots + P_{1k}(t)e^{\lambda_k t} \\ x_2(t) &= P_{21}(t)e^{\lambda_1 t} + P_{22}e^{\lambda_2} + \cdots + P_{2k}(t)e^{\lambda_k t} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n(t) &= P_{n1}(t)e^{\lambda_1 t} + P_{n2}e^{\lambda_2} + \cdots + P_{nk}(t)e^{\lambda_k t} \end{aligned} \tag{2.20}$$

unde P_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,k}$ sunt polinoame de grad cel mult $m_k - 1$ ai căror coeficienţi depind liniar de m_j constante arbitrare.

Facem de asemenea observaţia că dacă unele rădăcini λ_i sunt complexe, soluţia generală (2.20) poate fi prezentată, la fel ca în cazul ecuaţiilor diferenţiale, sub formă reală. Din relaţia (2.20) rezultă:

Teorema 2.5. *Condiţia necesară şi suficientă ca toate soluţiile sistemului* (2.13) *să tindă la zero pentru* $t \to \infty$ *este ca părţile reale ale rădăcinilor ecuaţiei caracteristice asociate matricii* A *să fie strict negative.*

Dacă în locul sistemului diferenţial (2.13) luăm sistemul

$$x'(t) = Ax(t) + b(t),\ \ t \in \mathbb{R}$$

unde $b(t)$ este o funcţie vectorială continuă pe $\mathbb{R}$, atunci lui i se pot aplica consideraţiile privind aflarea soluţiei generale plecând de la un sistem fundamental de soluţii pentru sistemul diferenţial liniar omogen asociat.

3.3 Transformata Laplace

Transformata Laplace, utilizată mai ales în electrotehnică în teoria circuitelor, este o metodă care permite transformarea unei probleme de ecuaţii diferenţiale cu valori iniţiale într-o problemă de algebră.

Această transformare integrală a fost introdusă de matematicianul francez Pierre Simon Laplace (1749–1827) în lucrările sale de teoria probabilităţilor şi utilizată apoi în rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale din teoria circuitelor electrice de inginerul englez Oliver Heaviside (1850–1925).

Definiţia 3.1. Dacă $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$, definim transformata sa Laplace prin:

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt, \tag{3.1}$$

dacă integrala din membrul drept există.

Observaţii.

1. Întrucât în Definiţia 3.1 apar numai valorile lui f pe $[0,\infty)$, putem considera extensia sa, notată tot cu f, definită prin:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ f(t) & \text{for } t \geq 0 \end{cases}$$

2. Integrala din membrul drept din (3.1) trebuie înţeleasă în sensul:

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} f(t)dt.$$

3. Deoarece membrul drept în (3.1) este o funcţie ce depinde de variabila s, vom folosi notaţia

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s);$$

adică, dacă f este funcţia ce depinde de t, pentru transformata sa, funcţie ce depinde de s, folosim litera mare corespunzătoare.

4. Facem precizarea că, deşi putem lua $s \in \mathbb{C}$, noi vom presupune peste tot în cele ce urmează că $s \in \mathbb{R}$.

Exemplul 3.1.

(i) Dacă $a \in \mathbb{R}$, transformata Laplace a lui $f(t) = e^{at}$ este

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt=\lim_{T\to\infty} \frac{e^{-(s-a)T}}{-(s-a)} - \frac{1}{-(s-a)} = \frac{1}{s-a}, s>a.$$

Deci

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \quad (s > a).$$

De aici rezultă (luând mai sus $a = 0$) că

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \text{ pentru } s > 0.$$

Dacă $a \in \mathbb{C}$, în acelaşi mod se arată că

$$F(s) = \frac{1}{s-a}, \text{ pentru } s > \operatorname{Re} a.$$

(ii) $\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st}t^n dt = \frac{1}{s^n+1}\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}$, dacă $s > 0$.

Să notăm cu $D(\mathcal{L})$ mulţimea funcţiilor pentru care există transformata Laplace. Rezultă imediat că pentru $f, g \in D(\mathcal{L})$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ are loc relaţia

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{L}(f) + \beta\mathcal{L}(g)$$

adică operatorul $\mathcal{L}$ este liniar.

Revenind la definiţia transformatei Laplace, funcţia f se numeşte *original* sau *original Laplace* şi este o funcţie de variabilă reală t (în multe probleme t desemnează timpul), iar funcţia F se numeşte *transformata Laplace a lui* f şi este o funcţie de variabilă reală s.

Domeniul de variaţie a lui s este în strânsă legătură cu existenţa integralei (3.1).

Dacă F este o transformată Laplace, atunci originalul corespunzător se obţine utilizând transformata inversă Laplace

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \quad \text{pentru } t > 0. \tag{3.2}$$

Pentru a exista transformata Laplace a funcţiei f este necesar, după cum am văzut, ca integrala din (3.1) să fie convergentă. În continuare, identificăm o clasă de funcţii pentru care acest lucru se întâmplă.

Propoziţia 3.1. *Fie* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă şi* $\alpha \in \mathbb{C}$*, astfel că are loc relaţia:*

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t} f(t) = 0. \tag{3.3}$$

Atunci există transformata Laplace a lui f (*se mai spune că* f *este de ordin exponenţial*).

O funcţie f este continuă pe porţiuni pentru $t \geq 0$ dacă, în orice interval $0 \leq a \leq t \leq b$, există cel mult un număr finit de puncte t_k, $k = 1, 2, ..., n$ $(t_{k-1} < t_k)$ în care f are discontinuităţile de speţa întâi şi este continuă pe orice interval deschis (t_{k-1}, t_k).

Propoziţia 3.2. *Dacă* f *este de ordin exponenţial şi continuă pe porţiuni pentru* $t \geq 0$, *atunci există transformata sa Laplace.*

Demonstraţiile acestor propoziţii sunt simple şi le lăsăm ca exerciţiu.

Mai menţionăm faptul că funcţiile folosite în mod obişnuit în studiul ecuaţiilor diferenţiale liniare admit transformată Laplace, astfel încât, în cele ce urmează nu ne vom propune să studiem condiţiile de existenţă ale acestor transformate, ci să calculăm transformatele unor funcţii elementare şi utilizarea lor în rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale.

Exemplul 3.2. Dacă în Exemplul 3.1 (i) luăm $a = ib$, rezultă

$$\mathcal{L}\{e^{ibt}\} = \frac{1}{s - ib} = \frac{s + ib}{s^2 + b^2} = \frac{s}{s^2 + b^2} + \frac{ib}{s^2 + b^2}.$$

Dacă $\omega \in \mathbb{R}$, ţinând cont că $e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$, iar operatorul $\mathcal{L}$ este liniar, obţinem

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\} = \frac{s}{s^2+\omega^2},\ \mathcal{L}\{\sin\omega t\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \text{ dacă } s>0. \tag{3.4}$$

În teorema care urmează enumerăm câteva proprietăţi elementare ale transformatei Laplace, care se utilizează în lucrul cu aceasta.

Teorema 3.1.

- **Translaţia.** *Dacă f este un original, F este transformata sa, iar $a \in \mathbb{R}$, atunci*

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a). \tag{3.5}$$

- **Translaţia argumentului.** *Dacă F este transformata lui f şi $a>0$, atunci*

$$\mathcal{L}\{f(t-a)h(t-a)\} = e^{-as}F(s). \tag{3.6}$$

$$\mathcal{L}\{f(t+a)h(t)\} = e^{as}\left[F(s) - \int_0^a e^{-st}f(t)dt\right]. \tag{3.7}$$

pentru $a>0$, unde h este funcţia unitate a lui Heaviside,

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t<0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

- **Derivarea originalului.** *Dacă f şi f' sunt originale Laplace, atunci*

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0_+), \tag{3.8}$$

unde $f(0_+)$ este limita la dreapta în 0 a lui f. De asemenea

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0_+) - s^{n-2}f'(0_+) - \cdots - f^{(n-1)}(0_+),$$

dacă $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n(0,\infty)$, iar $f^{(i)}$, $i = \overline{0,n}$ sunt originale Laplace. Formulele de mai sus se extind cu uşurinţă pentru cazul în care f are un număr finit de puncte de discontinuitate de speţa I.

- **Integrarea originalului.** *Dacă f este un original Laplace, atunci*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}. \tag{3.9}$$

- **Derivarea transformatei sau înmulţirea originalului cu t.**

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\{f(t)\}. \tag{3.10}$$

- **Împărţirea cu t.** *Dacă f şi $\frac{f(t)}{t}$ sunt originale Laplace, iar F este transformata lui f, atunci*

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(\tau)d\tau = \int_s^\infty \mathcal{L}\{f(t)\}d\tau. \tag{3.11}$$

- **Teorema valorii iniţiale.** *Dacă f şi f' sunt originale Laplace şi dacă există $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t)$, atunci*

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t). \tag{3.12}$$

- **Teorema valorii finale.** *Dacă f şi f' sunt originale Laplace, f' este mărginită şi există $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$, atunci*

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{t\to\infty} f(t). \tag{3.13}$$

- **Teorema convoluţiei.** *Dacă f şi g sunt originale Laplace, iar F şi G transformatele lor, atunci*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\} = F(s)G(s), \tag{3.14}$$

  deci transformata produsului de convoluţie este egală cu produsul transformatelor.

Observaţie. Luând în (3.14) $g(t) \equiv 1$ şi ţinând cont că $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$, se deduce (3.9).

Toate proprietăţile enunţate în Teorema 3.1 se demonstrează simplu, folosind definiţia transformatei şi metoda integrării prin părţi.

Proprietăţile (3.5)–(3.11) şi (3.14) din Teorema 3.1 se pot transpune imediat pentru transformata inversă Laplace.

Mai exact, are loc:

Teorema 3.2.

- *Dacă F este transformata Laplace a lui f şi $k \in \mathbb{R}_+$, atunci*

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(ks)\} = \frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right) h(t), \quad (k > 0). \tag{3.15}$$

- **Inversa translatei.** *Dacă F este o transformată Laplace şi dacă originalul corespunzător transformatei F este f, atunci*

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t) h(t). \tag{3.16}$$

- **Translaţia în real.** *Dacă F este o transformată Laplace şi f este originalul său, atunci*

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as} F(s)\} = f(t-a) h(t-a), \tag{3.17}$$

  dacă $a > 0$ şi

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-as} F(s) - e^{-as} \int_0^{-a} e^{-st} f(t) dt\right\} = f(t+a) h(t), \tag{3.18}$$

  dacă $a < 0$, unde h este funcţia lui Heaviside.

- **Înmulţirea cu s.** *Dacă F este transformata lui f şi dacă $f(0_+) = 0$, atunci*

$$\mathcal{L}^{-1}\{sF(s)\} = f'(t). \tag{3.19}$$

  Dacă $f(0_+) \neq 0$, atunci

$$\mathcal{L}^{-1}\{sF(s)\} = f'(t) + f(0_+)\delta(t), \tag{3.20}$$

  unde δ este distribuţia lui Dirac.

- **Împărţirea cu s.** *Dacă F este transformata Laplace a lui f, atunci*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(\tau) d\tau. \tag{3.21}$$

  Rezultatul se generalizează pentru împărţirea cu s^n, $n = 2, 3, \ldots$

- **Derivarea transformatei.** *Are loc relaţia*

$$\mathcal{L}^{-1}\{F^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n f(t). \tag{3.22}$$

- **Integrarea transformatei.** *Dacă F este o transformată Laplace şi f originalul său, atunci*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^{\infty} F(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{t} f(t). \tag{3.23}$$

- **Relaţia lui Duhamel.** *Dacă F şi G sunt transformatele Laplace ale originalelor f şi g, atunci*

$$\mathcal{L}^{-1}\{sF(s)G(s)\} = f(t)g(0_+) + \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau. \tag{3.24}$$

- **Prima teoremă a lui Heaviside.** *Dacă transformata F se poate dezvolta în serie în jurul punctului de la infinit, adică*

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s^{n+1}}$$

seria fiind convergentă pentru $|s| > M$, atunci originalul corespunzător $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ este dat de

$$f(t) = h(t)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}t^n. \tag{3.25}$$

unde h este funcţia lui Heaviside.

- **A doua teoremă a lui Heaviside.** *Dacă transformata F este o funcţie raţională, atunci originalul corespunzător f este egal cu suma originalelor în care s-a descompus F.*

Teorema 3.3. *Dacă $f(t,x)$ este un original Laplace în raport cu t iar $F(s,x)$ transformata sa şi dacă există limitele*

$$\lim_{x\to x_0} f(t,x) \quad \text{şi} \quad \lim_{x\to x_0} F(s,x)$$

atunci

$$\mathcal{L}\left\{\lim_{x\to x_0} f(t,x)\right\} = \lim_{x\to x_0} F(s,x). \tag{3.26}$$

Teorema 3.4. *Dacă $f(t,x)$ este un original Laplace în raport cu t, $F(s,x) = \mathcal{L}\{f(t,x)\}$ şi dacă există derivata $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$, atunci*

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right\} = \frac{\partial F(s,x)}{\partial x}. \tag{3.27}$$

Teorema 3.5. *Dacă $f(t,x)$ este un original Laplace în raport cu t şi dacă $F(s,x) = \mathcal{L}\{f(t,x)\}$, atunci*

$$\mathcal{L}\left\{\int_{x_0}^{x} f(t,\tau)d\tau\right\} = \int_{x_0}^{x} F(s,\tau)d\tau. \tag{3.28}$$

Observaţii.

(i) Transformata Laplace nu este injectivă. De exemplu, dacă considerăm funcţiile

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0,\ t \neq 1,\ t \neq 2 \\ 3, & t = 1 \\ 4, & t = 2 \end{cases} \qquad \text{şi} \qquad g(t) = 1 \text{ pentru } t \geq 0$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\}.$$

(ii) Dacă, totuşi, funcţiile f_1 şi f_2 sunt continue pentru $t \geq 0$ şi $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = \mathcal{L}\{f_2(t)\}$, atunci rezultă$f_1(t) = f_2(t)$.

Rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale utilizând transformata Laplace

Formula (3.8) şi liniaritatea transformatei Laplace oferă o cale elegantă pentru rezolvarea problemei Cauchy pentru ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi.

Schematic, în rezolvarea unei ecuaţii diferenţiale cu ajutorul transformatei Laplace, se parcurg următoarele etape:

a) Se calculează transformata Laplace a ecuaţiei.

b) Se determină valoarea transformatei $X(s)$.

c) Se aplică transformata inversă Laplace lui X.

Pentru punctul b) se folosesc relaţiile (3.5)–(3.11) şi (3.14) sau tabelele cu transformatele elementare. În ce priveşte punctul c), se folosesc, mai ales, translaţia (3.16) şi descompunerea expresiei lui X în fracţii simple (acolo unde este posibil) şi, evident, tabelele cu transformatele elementare.

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia diferenţială cu valori iniţiale

$$\begin{cases} x'' + 2x' + 5x = 0, & t > 0 \\ x(0) = 3,\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

Soluţie. Enumerăm etapele rezolvării acestei ecuaţii.

$$\mathcal{L}(x'' + 2x' + 5x) = \mathcal{L}(0) \qquad \text{(transformarea ambilor membri)}$$

$$\mathcal{L}(x'') + 2\mathcal{L}(x') + 5\mathcal{L}(x) = 0 \qquad \text{(liniaritatea)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}(x) = X \\ \mathcal{L}(x') = sX - 3 \\ \mathcal{L}(x'') = s^2X - 3s \end{array}\right\} \qquad \text{(regula de transformare a derivatelor)}$$

$$s^2X - 3s + 2(sX - 3) + 5X = 0 \qquad \text{(înlocuirea în ecuaţie)}$$

$$X(s) = \frac{3s+6}{s^2+2s+5} \qquad \text{(găsirea lui } X\text{)}$$

Deoarece numitorul nu are rădăcini reale îl scriem ca o sumă de pătrate şi obţinem

$$X(s) = \frac{3(s+1)+3}{(s+1)^2+4} = Y(s+1),$$

unde

$$Y(s) = \frac{3s+3}{s^2+4} = \frac{3s}{s^2+4} + \frac{3}{2}\,\frac{2}{s^2+4}.$$

Aplicând (3.4) în relaţia de mai sus ($b = 2$) găsim

$$Y(s) = \mathcal{L}\left\{3\cos 2t + \frac{3}{2}\sin 2t\right\}$$

şi apoi folosind (3.16) obţinem

$$x(t) = e^{-t}\left(3\cos 2t + \frac{3}{2}\sin 2t\right).$$

Funcţia δ a lui Dirac

Funcţia

$$\delta_\varepsilon(t - t_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon}, & t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

serveşte ca model pentru o forţă de tip "impuls".

Deoarece $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t - t_0)dt = 1$, funcţia $\delta_\varepsilon(t - t_0)$ se mai numeşte *impuls unitate*. În practică, este util să lucrăm cu alt tip de impuls unitate şi anume

$$\delta(t - t_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t - t_0).$$

Această entitate, care nu mai este o funcţie în accepţiunea clasică, poate fi caracterizată de două proprietăţi

(i) $\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0, \end{cases}$

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)dt = 1.$

Expresia $\delta(t-t_0)$ se numeşte *funcţia delta a lui Dirac centrată în* t_0 şi a fost introdusă de fizicianul englez Paul A.M. Dirac (1902–1984) în anul 1930.

Putem obţine transformata Laplace a lui $\delta(t-t_0)$ formal, prin

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{L}\{\delta_\varepsilon(t-t_0)\}.$$

Deoarece

$$\mathcal{L}\{\delta_\varepsilon(t-t_0)\} = e^{-st_0}\left(\frac{e^{s\varepsilon}-e^{-s\varepsilon}}{2s\varepsilon}\right),$$

rezultă, prin trecere la limită cu $\varepsilon \longrightarrow 0$,

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}.$$

Să notăm faptul că, din definiţia transformatei Laplace pentru o funcţie continuă pe porţiuni, rezultă $\mathcal{L}\{f(t)\} \to 0$ pentru $s \to \infty$, în timp ce $\mathcal{L}\{\delta(t)\}$=1, ceea ce întăreşte faptul că δ nu este o funcţie. Ea este riguros fundamentată în cadrul teoriei distribuţiilor.

3.4 Probleme

1. Să se determine mulţimea soluţiilor următoarelor ecuaţii liniare omogene:
(i) $x''' - 3x'' + 3x' - x = 0$,
(ii) $x^{\mathrm{IV}} + \alpha^2 x'' = 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$,
(iii) $2x''' - 3x'' + x' = 0$,
(iv) $x^{(n)} + \frac{n}{1}x^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{(n-2)} + \cdots + \frac{n}{1}x' + x = 0$.

2. Să se determine mulţimea soluţiilor următoarelor ecuaţii liniare neomogene:
(i) $x''' - x'' + x' + x = te^t$,
(ii) $x'' + x = \sin t - \cos t$,
(iii) $x'' - a^2x = e^{bt},\ a, b \in \mathbb{R}$,
(iv) $x'' - 2x' + x = \frac{e^t}{t^2+1}$.

3. Să se rezolve problemele Cauchy
(i) $x^{\mathrm{IV}} - x = 8e^t,\ x(0) = -1,\ x'(0) = 0,\ x''(0) = 1,\ x''' = 0$,
(ii) $x''' - x = 2t,\ x(0) = x'(0) = 0,\ x''(0) = 2$,
(iii) $x''' - 3x' - 2x = 9e^{2t},\ x(0) = 0,\ x'(0) = 3,\ x''(0) = 3$.

4. Se dă ecuaţia diferenţială

$$x'' + ax' + bx = 0,\ a, b \in \mathbb{R}.$$

Să se determine a şi b astfel încât:

(i) toate soluţiile ecuaţiei să fie mărginite pe $\mathbb{R}$,

(ii) toate soluţiile ecuaţiei să fie mărginite pe $\mathbb{R}_+$,

(iii) toate soluţiile ecuaţiei să fie mărginite pe $\mathbb{R}_-$,

(iv) toate soluţiile ecuaţiei să fie periodice,

(v) cel puţin o soluţie nebanală a ecuaţiei să tindă la zero pentru $t \to \infty$,

(vi) fiecare soluţie a ecuaţiei să aibă o infinitate de zerouri.

Să se rezolve sistemele de ecuaţii diferenţiale liniare şi omogene cu coeficienţi constanţi

5. $\begin{cases} x' = -3x + 4y - 2z \\ y' = x + z \\ z' = 6x - 6y + 5z, \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 3y - z \\ z' = -x + 2y + 3z, \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + z \\ z' = x + y. \end{cases}$

Să se rezolve sistemele diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi, neomogene:

8. $\begin{cases} x' = -2x - 4y + 1 + 4t \\ y' = -x + y + \dfrac{3}{2}t^2, \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = -4x + 2y + \dfrac{2}{e^t - 1} \\ y' = 6x + 3y + \dfrac{3}{e^t - 1}, \end{cases}$

10. $\begin{cases} x' = y - x + e^t \\ y' = z - x + \cos t \\ z' = -x. \end{cases}$

11. Se dau sistemele diferenţiale liniare neomogene şi corespunzător un sistem de soluţii pentru sistemele omogene asociate.

(i) $x' = Ax + b,\ A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$

$x^1 = \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix},\ x^2 = \begin{pmatrix} e^{4t}t \\ e^{4t}(t-1) \end{pmatrix}$

(ii) $x' = Ax + b,\ A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} e^t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$

$$x^1 = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix},\ x^2 = \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t + \cos t \\ \cos t \end{pmatrix},\ x^3 = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Să se verifice că vectorii soluţie sunt liniar independenţi şi apoi, folosind metoda variaţiei constantelor, să se găsească soluţiile generale ale sistemelor neomogene.

12. Să se arate că dacă f este un original Laplace cu transformata F şi dacă $\dfrac{f(t)}{t}$ este de asemenea original Laplace, atunci

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^\infty F(s) ds.$$

13. Utilizând transformata Laplace să se calculeze:
(i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$, (ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$, (iii) $\displaystyle\int_0^\infty dt \int_0^t \frac{e^{-t}\sin\tau}{\tau} d\tau$.

14. Să se calculeze transformatele originalelor: $e^{at}t^n$, $e^{at}\cos\omega t$, $e^{at}\sin\omega t$.

15. Să se calculeze $\mathcal{L}\{g(t)\}$ unde

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ (t-1)^n, & t \geq 1 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

16. Să se calculeze $\mathcal{L}\{\cos(\omega t + \varphi) h(t)\}$, unde $\omega, \varphi \in \mathbb{R}_+$.

17. Aplicând (10), să se calculeze $\mathcal{L}^{-1}\left\{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{s}\right\}$.

18. Să se calculeze $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s+5}{s^2+7}\right\}$.

19. Să se calculeze $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s-2}{s^3(s^2+4)}\right\}$.

20. Să se arate că

$$\mathcal{L}\{t^\alpha\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}},\ \alpha > -1,$$

unde Γ este funcţia gama a lui Euler.

21. Să se calculeze transformata Laplace a funcţiei Bessel J_0.

22. Să se arate că

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

23. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei neomogene

$$x^{\mathrm{IV}} + 5x'' + 4x = \sin 2t. \tag{$*$}$$

24. Să se rezolve ecuaţia

$$\begin{cases} x'' - 6x' + 9x = t^2 e^{3t} \\ x(0) = 2,\ x'(0) = 6. \end{cases}$$

25. Să se rezolve

$$\begin{cases} x' + 3x = 1, \quad t > 0 \\ x(0) = -1. \end{cases}$$

26. Să se rezolve

$$\begin{cases} x'' + x = e^{-2t} \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$$

27. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2x' + y' - y = t \\ x' + y' = t^2, \end{cases}$$

cu condiţiile $x(0) = 1,\ y(0) = 0$.

28. Suportul unei mitraliere este proiectat astfel încât arma şi mecanismul de recul formează un sistem descris de ecuaţia diferenţială

$$x'' + 2x' + x = f(t),$$

unde x reprezintă lungimea mişcării de recul. Presupunem că fiecare cartuş dă un impuls sistemului astfel că o rafală a $k+1$ cartuşe, la intervale τ de timp dă $f(t) = \sum\limits_{p=0}^{k} \delta(t - p\tau)$. Să se determine x ştiind că $x(0) = x'(0) = 0$.

29. Să se calculeze transformatele inverse Laplace pentru funcţiile: a) $s^{-\frac{3}{2}}$; b) $\dfrac{1}{s^2+3s}$; c) $\dfrac{s}{s^2+2s-3}$; d) $\dfrac{1}{s^2(s^2+4)}$; e) $\dfrac{s}{(s+2)(s^2+4)}$.

30. Folosind transformata Laplace să se determine o soluţie particulară a ecuaţiilor neomogene

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & x' + 4x = e^{-4t}; & \text{b)} & x'' + 4x' + 5x = e^{-t}; \\ \text{c)} & x'' + x = t\cos t; & \text{d)} & x'' + 2x' + 2x = \sin t. \end{array}$$

31. Să se rezolve, cu ajutorul transformatei Laplace, problemele Cauchy

a) $\begin{cases} x'' + 3x' + 2x = 1 \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0, \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' + 2x = e^{-t} \\ x(0) = 3, \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' + 2x = e^{-2t} \\ x(0) = 0, \end{cases}$ d) $\begin{cases} x'' + 2x' + 4x = 0 \\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0, \end{cases}$

e) $\begin{cases} x'' + 4x = e^{-2t} \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0, \end{cases}$ f) $\begin{cases} x'' + 4x = 0 \\ x(0) = 5,\ x'(0) = 6, \end{cases}$

g) $\begin{cases} x'' + 4x = 6\sin t \\ x(0) = 6,\ x'(0) = 0, \end{cases}$ h) $\begin{cases} x' - 3x = te^{2t} \\ x(0) = 0. \end{cases}$

i) $\begin{cases} x'' + \omega^2 x = \omega^2 f(t) \\ x(0) = x'(0) = 0, \end{cases}$ j) $\begin{cases} x'' + 3x' + 2x = \\ \qquad = t - (t-1)h(t-1) \\ x(0) = x'(0) = 0, \end{cases}$

k) $\begin{cases} x'' + x = \delta(t) \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$

32. Fie ecuaţia integrală

$$x(t) = f(t) + \int_0^t x(\tau)\sin(t-\tau)d\tau$$

(i) Să se arate că $X(s) = F(s)(1+s^2)/s^2$,

(ii) Dacă $f(t) = 12t^2$, să se arate că $x(t) = t^4 + 12t^2$.

33. Să se rezolve problemele cu valori iniţiale:

a) $\begin{cases} x' + ax = h(t) - 2h(t-1) + h(t-2),\ a \in \mathbb{R} \\ x(0) = 0, \end{cases}$

b) $\begin{cases} x'' + 2x' + 5x = \delta(t) \\ x(0) = x'(0) = 0, \end{cases}$ c) $\begin{cases} x'' + 2x' + 5x = \delta_\varepsilon(t) \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$

34. Dacă $\delta'(t - t_0)$ este derivata funcţiei δ a lui Dirac, atunci se ştie că $\mathcal{L}\{\delta'(t-t_0)\} = se^{-st_0}$, $t_0 \geq 0$. Folosind acest rezultat, să se rezolve problema Cauchy

$$\begin{cases} x' + 5x = \delta'(t) \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Capitolul 4

Elemente de teoria stabilităţii

4.1 Punerea problemei stabilităţii

Să considerăm sistemul diferenţial

$$x' = f(t, x) \tag{1.1}$$

unde

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad f(t, x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{pmatrix}$$

f_i, $i = 1, 2, ..., n$, fiind funcţii (neliniare) de $x_1, x_2, ..., x_n$. În general, nu ne putem aştepta ca, pentru un sistem de forma (1.1), să găsim o formulă explicită pentru soluţia sa generală. În această situaţie atenţia se îndreaptă spre evidenţierea unor aspecte calitative legate de soluţiile sistemului (1.1) care nu presupun rezolvarea acestuia.

Vom presupune că sunt îndeplinite condiţiile teoremei de existenţă şi unicitate a soluţiei problemei Cauchy pentru $t \in [t_0, \infty)$ şi pentru $x \in \Omega$, Ω fiind o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^n$.

Deci pentru orice $a \in \Omega$, există şi este unică o soluţie $x = \varphi(t)$, $\varphi : [t_0, \infty) \to \Omega$ astfel încât $\varphi(t_0) = a$.

Definiţia noţiunii de soluţie stabilă a unui sistem diferenţial şi primele cercetări în această direcţie au apărut în a doua parte a secolului al XIX-lea şi sunt datorate matematicienilor H. Poincaré (1854–1912) şi A.M. Liapunov (1857–1918).

În termeni descriptivi se spune că soluţia $x = \varphi(t)$, $\varphi : [t_0, \infty) \to \Omega$ este *stabilă* la $+\infty$ în sens Poincaré–Liapunov dacă la variaţii "suficient de mici" ale datei iniţiale x_0 corespund variaţii "mici" ale soluţiei corespunzătoare.

O formulare mai precisă este dată de:

Definiţia 1.1. Soluţia φ a sistemului (1) se numeşte *stabilă* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât de îndată ce $\widetilde{x_0} \in \Omega$ şi $\|\widetilde{x}_0 - x_0\| < \delta(\varepsilon)$ soluţiile $\widetilde{\varphi}$ şi φ care la momentul t_0 iau respectiv valorile $\widetilde{x}_0$ şi x_0 satisfac inegalitatea

$$\|\widetilde{\varphi}(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon, \text{ pentru orice } t \in [t_0, \infty).$$

În Fig. 1.1 dăm o imagine grafică a stabilităţii soluţiei φ.

Fig. 1.1.

Definiţia 1.2. Spunem că soluţia φ a sistemului (1.1) este *asimptotic stabilă* dacă este stabilă (în sensul Definiţiei 1.1) şi satisface în plus condiţia $\lim\limits_{t\to\infty} \|\widetilde{\varphi}(t) - \varphi(t)\| = 0$.

Cazul stabilităţii spre $-\infty$ se defineşte similar. Remarcăm de asemenea că printr-o translaţie convenabilă putem presupune că sistemul (1.1) admite soluţia banală, stabilitatea soluţiei iniţiale revenind la stabilitatea soluţiei banale pentru noul sistem. Într-adevăr, dacă studiem stabilitatea soluţiei φ a

sistemului (1.1), făcând substituţia $x = y + \varphi$ în sistemul (1.1) rezultă că y va satisface sistemul

$$y' = f(t, y + \varphi) - f(t, \varphi) = \widetilde{f}(t, y)$$

şi avem $\widetilde{f}(t, 0) = 0$ iar soluţiei $x = \varphi$ îi corespunde soluţia $y = 0$.

4.2 Stabilitatea sistemelor diferenţiale. Metoda funcţiei Liapunov

Fie sistemul autonom de ecuaţii diferenţiale

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, ..., x_n),\ i = 1, 2...., n \tag{2.1}$$

unde $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$, pentru toţi $i = 1, 2, ..., n$, Ω fiind o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^n$.

Spunem că $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, $x^0 \in \Omega$, este *punct critic* sau *punct de echilibru* pentru sistemul de ecuaţii diferenţiale (2.1) dacă $f_i(x^0) = 0$ pentru orice $i = 1, 2, ..., n$. Soluţia $x(t) \equiv x^0$ a sistemului (2.1) se numeşte *soluţie staţionară* sau *soluţie de echilibru* a sistemului.

Definiţia 2.1. Punctul $x^0 \in \Omega$ se numeşte *punct critic izolat* pentru sistemul (2.1) dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încât, în mulţimea $(B(x^0, \varepsilon) \setminus \{x_0\}) \cap \Omega$, nu există nici un punct critic al sistemului.

Definiţia 2.2. Spunem că punctul critic izolat $x^c = (x_1^c, x_2^c, ..., x_n^c)$ al sistemului (2.1) este *punct critic stabil* sau *punct de echilibru stabil* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel că

$$\|x(0) - x^c\| < \delta \text{ implică } \|x(t) - x^c\| < \varepsilon$$

pentru toţi $t > 0$, $x(\cdot)$ fiind o soluţie a sistemului (2.1). Dacă există $\delta > 0$ astfel încât

$$\|x(0) - x^c\| < \delta \text{ implică } \lim_{t \to \infty} \|x(t) - x^c\| = 0,$$

spunem că punctul critic x^c este *asimptotic stabil*.

Facem menţiunea că unii autori folosesc în loc de stabilitate a punctului critic expresia *stabilitate a soluţiei staţionare*. După cum se vede, este vorba de acelaşi lucru.

Metoda lui Liapunov în abordarea stabilităţii soluţiei staţionare constă în determinarea unei funcţii V care joacă rolul de *energie* pentru sistemul

(2.1) şi care rămâne mărginită de-a lungul oricărei traiectorii (soluţii) $t \mapsto (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ a sistemului sau, în cazul stabilităţii asimptotice, $V(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) \to 0$ pentru $t \to \infty$.

Definiţia 2.3. O funcţie V_1, $V_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se numeşte *funcţie Liapunov de primul tip* relativ la punctul critic izolat $(x_1^c, x_2^c, ..., x_n^c)$ al sistemului neliniar (2.1) dacă satisface următoarele condiţii

(i) V_1 este de clasă C^1 în raport cu toate variabilele sale în paralelipipedul Π ce conţine punctul critic $(x_1^c, ..., x_n^c)$.

(ii) În punctul critic, $V_1(x_1^c, ..., x_n^c) = 0$.

(iii) Există o funcţie strict crescătoare, continuă şi pozitivă φ_1 definită pe $0 < r < \delta$ astfel că $V_1(x_1, ..., x_n) \geq \varphi_1(r)$ în orice punct din Π, unde

$$r^2 = (x_1 - x_1^c)^2 + \cdots + (x_n - x_n^c)^2.$$

(iv) V_1 satisface în Π inegalitatea

$$f_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \cdots + f_n \frac{\partial V_1}{\partial x_n} \leq 0.$$

Observaţie. Din ipoteza (iv) rezultă că funcţia

$$t \to \frac{d}{dt} V_1(x_1(t), ..., x_n(t))$$

este negativă pe traiectoriile sistemului (2.1).

Cu aceste pregătiri putem enunţa prima teoremă a lui Liapunov

Teorema 2.1. (Prima teoremă a lui Liapunov) *Dacă V_1 este o funcţie Liapunov de primul tip relativ la punctul critic izolat $(x_1^c, x_2^c, ..., x_n^c)$ al sistemului neliniar* (2.1)*, atunci punctul critic este stabil.*

Demonstraţie. Avem $\varphi_1(r) \leq V_1(x_1, ..., .x_n)$ unde $r^2 = (x_1 - x_1^c)^2 + (x_2 - x_2^c)^2 + \cdots + (x_n - x_n^c)^2$ apoi, ţinând cont de (iv),

$$V_1(x_1(t), ..., x_n(t)) = V_1(x_1(0), ..., x_n(0)) +$$
$$+ \int_0^t \frac{d}{ds} V_1(x_1(s), ..., x_n(s)) ds \leq V_1(x_1(0), ..., x_n(0)).$$

Dar funcţia φ_1 fiind continuă şi crescătoare are o inversă continuă φ_1^{-1}, care verifică

$$r(t) \leq \varphi_1^{-1}(V_1(x_1(0), ..., x_n(0)), \tag{2.2}$$

unde $r(t) = \sqrt{(x_1(t) - x_1^c)^2 + \cdots + (x_n(t) - x_n^c)^2}$.

Fie acum $\varepsilon > 0$. Alegem $\delta_1 > 0$ astfel că $\varphi_1^{-1}(\rho) < \varepsilon$ pentru $0 < \rho < \delta_1$.

Deoarece V_1 este continuă şi $(x_1^c, ..., x_n^c)$ este punct critic, rezultă că putem alege $\delta > 0$ astfel că $V_1(x_1, x_2, ..., x_n) < \delta_1$ dacă $(x_1 - x_1^c)^2 + \cdots + (x_n - x_n^c)^2 < \delta^2$.

Din (2.2) rezultă că ori de câte ori data iniţială $(x_1(0), ..., x_n(0))$ satisface

$$(x_1(0) - x_1^c)^2 + \cdots + (x_n(0) - x_n^c)^2 < \delta^2$$

avem $r(t) < \varepsilon$ pentru toţi $t > 0$, adică ceea ce trebuia demonstrat. ■

Exemplul 2.1. Fie ecuaţia oscilatorului armonic $x'' + \omega^2 x = 0$ cu $\omega > 0$. Ecuaţia este echivalentă cu sistemul diferenţial de ordinul întâi

$$x' = y, \; y' = -\omega^2 x$$

care are punctul critic $(0, 0)$. Definim energia totală a oscilatorului armonic (energia cinetică plus energia potenţială) prin

$$V = \frac{1}{2}x'^2 + \frac{\omega^2}{2}x^2 = \frac{1}{2}(y^2 + \omega^2 x^2).$$

Rezultă imediat că funcţia V este o funcţie Liapunov, deci soluţia staţionară este stabilă.

Exemplul 2.2. Folosind funcţia Liapunov $V_1(x, y) = x^2 + y^2$ să se demonstreze că pentru sistemul diferenţial

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - y^3 \end{cases}$$

$(0, 0)$ este punct critic stabil.

Soluţie. Într-adevăr, funcţia Liapunov este continuă şi pozitivă în orice paralelipiped ce conţine punctul critic $(0, 0)$. Alegem funcţia $\varphi_1(r) = r^2$.

Pentru a încheia demonstraţia este suficient să verificăm (iv)

$$\frac{d}{dt}V_1(x, y) = 2xx' + 2yy' = 2xy + 2y(-x - y^3) = -2y^4 \leq 0.$$

Definiţia 2.4. Funcţia V_2, $V_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se numeşte *funcţie Liapunov de al doilea tip* relativ la punctul critic izolat $(x_1^c, x_2^c, ..., x_n^c)$ al sistemului neliniar (2.1), dacă satisface următoarele condiţii:

(j) V_2 este de clasă C^1 în raport cu toate variabilele sale în paralelipipedul Π ce conţine punctul critic $(x_1^c, ..., x_n^c)$.

(jj) $V_2(x_1^c, ..., x_n^c) = 0$.

(jjj) Există o funcţie strict crescătoare, continuă şi pozitivă φ_2 definită pe $0 < r < \delta$ astfel că $V_2(x_1, ..., x_n) \geq \varphi_2(r)$ în orice punct din Π, unde

$$r^2 = (x_1 - x_1^c)^2 + \cdots + (x_n - x_n^c)^2.$$

(jv) V_2 satisface în Π inegalitatea

$$f_1 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + \cdots + f_n \frac{\partial V_2}{\partial x_n} < 0.$$

Să observăm faptul că singura deosebire care apare în definirea funcţiei Liapunov de al doilea tip, faţă de cea de primul tip, este dată de condiţia (jv) care întăreşte condiţia (iv).

Teorema 2.2. (A doua teoremă a lui Liapunov) *Dacă V_2 este o funcţie Liapunov de al doilea tip relativ la punctul critic izolat $(x_1^c, x_2^c, ..., x_n^c)$ al sistemului neliniar* (2.1)*, atunci punctul critic este asimptotic stabil.*

Demonstraţie. Din ipoteze avem

$$\frac{d}{dt} V_2(x_1(t), ..., x_n(t)) < 0,$$

astfel că funcţia $t \to V_2(x_1(t), ..., x_n(t))$ este descrescătoare şi mărginită inferior de zero. Prin urmare, există limita $L = \lim_{t\to\infty} V_2(x_1(t), ..., x_n(t))$. Dacă $L = 0$, avem $\varphi_2(r(t)) \leq V_2(x_1(t), ..., x_n(t))$, astfel că

$$r(t) \leq \varphi_2^{-1}(V_2(x_1(t), ..., x_n(t)) \to 0$$

pentru $t \to \infty$ şi demonstraţia este încheiată.

Dacă presupunem prin absurd că $L > 0$, atunci $\|x(t)\| \geq \delta > 0$ unde $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$, astfel că

$$\frac{d}{dt} V_2(x_1(t), ..., x_n(t)) \leq -A^2 < 0.$$

Aceasta implică

$$V_2(x_1(t), ..., x_n(t)) - V_2(x_1(0), ..., x_n(0)) \leq -A^2 t \to -\infty$$

care contrazice $V_2 \geq 0$. Deci $L = 0$. ∎

Exemplu. Folosind funcţia Liapunov $V_2(x, y) = x^2 + 2y^2$, să se demonstreze că pentru sistemul diferenţial

$$\begin{cases} x' = 2xy - x \\ y' = -x^2 - y^3 \end{cases}$$

$(0, 0)$ este punct critic asimptotic stabil.

Soluţie. Deoarece proprietăţile (j)–(jjj) sunt satisfăcute de V_2, rămâne de verificat doar (jv). Pentru asta calculăm

$$\frac{d}{dt}V_2(x, y) = 2xx' + 4yy' = 2x(2xy - x) + 4y(-x^2 - y^3) = -2x^2 - 4y^4$$

care este strict negativă (exceptând originea) ceea ce implică faptul că $(0, 0)$ este punct critic asimptotic stabil.

Facem observaţia că, în tratarea problemelor de stabilitate, nu există o reţetă care să permită determinarea funcţiei Liapunov pentru sisteme diferenţiale neliniare. Totul ţine de experienţa rezolvitorului iar, pentru unele sisteme ce modelează fenomene fizice, de faptul că, funcţia Liapunov joacă rolul de energie.

Dăm în continuare, fără demonstraţie, două teoreme privind stabilitatea sistemelor diferenţiale, liniare sau a căror tratare se reduce la cazul liniar.

Să considerăm sistemul liniar omogen

$$x' = Ax \tag{2.3}$$

unde A este o matrice de tip $n \times n$ cu elemente numere reale. Matricea A se numeşte *hurwitziană* dacă toate rădăcinile ecuaţiei caracteristice $\det(\lambda I - A) = 0$ au partea reală negativă. Relativ la sistemul (2.3), este uşor de observat că soluţia banală este stabilă (asimptotic stabilă), dacă şi numai dacă orice soluţie a sa este stabilă (asimptotic stabilă). Din acest motiv, vorbim de stabilitatea sistemului şi nu doar a unei soluţii.

Teorema 2.3. *Sistemul* (2.3) *este asimptotic stabil dacă şi numai dacă matricea A este hurwitziană. Dacă toate rădăcinile caracteristice au partea reală negativă şi rădăcinile pur imaginare sunt simple, atunci sistemul* (2.3) *este stabil. Dacă cel puţin o rădăcină a ecuaţiei caracteristice are partea reală strict pozitivă, soluţia banală a sistemului este instabilă.*

În ce priveşte rădăcinile ecuaţiei caracteristice, există criteriul lui A. Hurwitz (1859–1919) care dă condiţiile necesare şi suficiente pe care trebuie să le

îndeplinească coeficienţii polinomului caracteristic $\det(\lambda I - A)$ pentru ca toate rădăcinile sale să aibă partea reală negativă. De exemplu, pentru polinomul $P(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$ acestea sunt: $a > 0$, $b > 0$ şi $ab > c$.

Să revenim la sistemul (2.1), unde funcţiile f_i, $i = 1, ..., n$ sunt presupuse de clasă C^1 în domeniul Π.

Fie $(x_1^c, ..., x_n^c)$ un punct critic pentru sistemul (2.1). Dezvoltând funcţiile f_i în serie Taylor în jurul punctului $x^c = (x_1^c, ..., x_n^c)$ obţinem

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^c)(x_j - x_j^c) + \cdots$$

Sistemul diferenţial liniar

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{2.4}$$

unde $A = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^c)\right)_{i,j=\overline{1,n}}$ poartă denumirea de prima aproximaţie liniară a sistemului (2.1) în jurul punctului critic x^c. Are loc

Teorema 2.4. *Presupunem că punctul $x^c = (x_1^c, x_2^c, ..., x_n^c)$ este punct critic izolat pentru sistemul neliniar* (2.3)*. Dacă matricea jacobiană A din sistemul* (2.4) *este hurwitziană, atunci punctul critic $(x_1^c, ..., x_n^c)$ este asimptotic stabil.*

Exemplu. Fie sistemul

$$\begin{cases} x' = -x - y + x^2 \\ y' = 2\sin x - 3y + y^2. \end{cases}$$

Pentru a studia stabilitatea soluţiei banale, considerăm sistemul liniarizat corespunzător

$$\begin{cases} x' = -x - y \\ y' = 2x - 3y \end{cases}$$

adică $\bar{x}' = A\bar{x}$, unde $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Rădăcinile caracteristice fiind $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$, Teorema 2.4 arată că punctul critic $(0, 0)$ este asimptotic stabil.

4.3 Probleme

1. Să se verifice cu ajutorul definiţiilor următoarele afirmaţii:

(i) Orice soluţie a ecuaţiei diferenţiale $x' + ax = 0$ este stabilă dacă $a = 0$, asimptotic stabilă dacă $a > 0$ şi instabilă dacă $a < 0$.

(ii) Orice soluţie a ecuaţiei $\sqrt{a^2 + t^2}\, dx + (t + x - \sqrt{a^2 + t^2})dt = 0$, $a \in \mathbb{R}$, este asimptotic stabilă.

(iii) Soluţia ecuaţiei diferenţiale $x' + 2tx = t + 1$ cu data iniţială $x(0) = 1$ este asimptotic stabilă.

(iv) Soluţia sistemului diferenţial $x' = -y$, $y' = x$ cu datele iniţiale $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$; $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, este stabilă dar nu este asimptotic stabilă.

2. Să se arate că $V(x, y) = x^2 + y^2$ este o funcţie Liapunov pentru sistemul

$$\begin{cases} x' = -x^3 + 2xy^2 \\ y' = -2x^2y - 5y^3. \end{cases}$$

3. Să se găsească o funcţie Liapunov de forma $V(x, y) = ax^2 + by^2$ pentru sistemul

$$\begin{cases} x' = -x^3 + xy^2 + 3x^7 \\ y' = -2x^2y - 4y^3 - 3y^5. \end{cases}$$

4. Folosind metoda funcţiei Liapunov, să se cerceteze stabilitatea soluţiei banale a următoarelor sisteme de ecuaţii:

a) $\begin{cases} x' = -xy^4 \\ y' = x^4y, \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = -2x - 3y \\ y' = x - y, \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = -y - x/2 - x^3/4 \\ y' = x - y/2 - y^3/4, \end{cases}$

d) $\begin{cases} x' = x^5 + y^3 \\ y' = x^3 - y^5, \end{cases}$

e) $\begin{cases} x' = ay - bx^{2n+1} \\ y' = -ax - cy^{2n+1}, \ \ a, b, c > 0, \ \ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

5. Să se studieze stabilitatea soluţiilor sistemului

$$\begin{cases} x' = x + 5y \\ y' = 5x + y. \end{cases}$$

6. Să se determine soluţiile staţionare ale sistemului diferenţial

$$\begin{cases} x' = 1 - xy \\ y' = x - y^3. \end{cases}$$

şi să se studieze stabilitatea lor.

7. Folosind metoda primei aproximaţii să se studieze stabilitatea soluţiei banale $(0,0,0)$ a sistemului diferenţial neliniar

$$\begin{cases} x' = -2x + y + 3z + 9y^2 \\ y' = -6y - 5z + 7z^2 \\ z' = -z + x^2 + y^2. \end{cases}$$

8. Fie sistemul diferenţial neliniar

$$\begin{cases} x' = y + ax(x^2 + y^2) \\ y' = -x + ay(x^2 + y^2, \;\; a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Să se arate că, deşi pentru sistemul liniarizat $x' = y$, $y' = -x$ punctul de echilibru $(0,0)$ este stabil, pentru sistemul iniţial acelaşi punct de echilibru este asimptotic stabil pentru $a < 0$ şi instabil pentru $a > 0$.

Capitolul 5

Integrale prime şi ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi

În acest capitol vom introduce noţiunea de integrală primă a unui sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare şi vom analiza legătura acesteia cu ecuaţiile cu derivate parţiale de ordinul întâi.

5.1 Integrale prime şi legi de conservare

Fie sistemul diferenţial autonom

$$x_i' = X_i(x_1, x_2, ..., x_n), \quad i = 1, 2, ..., n \tag{1.1}$$

unde funcţiile X_i sunt de clasă C^1 pe o mulţime deschisă D, $D \subset \mathbb{R}^n$.

Definiţie. Funcţia scalară $\Psi(x) = \Psi(x_1, x_2, ..., x_n)$, continuă şi cu derivate parţiale de ordinul întâi continue în D, care nu este identic egală cu o constantă în D, dar care este constantă de-a lungul soluţiilor sistemului (1.1) care rămân în D, se numeşte *integrală primă* a sistemului.

Dăm acum un criteriu analitic pentru a recunoaşte dacă o funcţie Ψ este sau nu o integrală primă, fără a cunoaşte soluţiile sistemului de ecuaţii diferenţiale.

Teorema 1.1. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca o funcţie Ψ continuă în D împreună cu derivatele parţiale de ordinul întâi, care nu este constantă*

în D, să fie o integrală primă a sistemului (1.1) *este ca să verifice egalitatea*

$$(\text{grad}\,\Psi(x), X(x)) = 0,\ \forall x \in D \tag{1.2}$$

unde $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$.

Demonstraţie. Necesitatea este imediată deoarece Ψ, fiind constantă de-a lungul oricărei soluţii a sistemului (1.1), avem

$$\Psi(x_1(t), ..., x_n(t)) \equiv C,$$

pentru orice soluţie $(x_1 t, x_2(t), ..., x_n(t))$ a sistemului (1.1) de unde, prin diferenţiere (şi ţinând cont că prin orice punct al lui D trece o soluţie a sistemului (1.1)), rezultă (1.2).

Suficienţa rezultă din faptul că (1.2) implică

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Psi(x(t))}{\partial x_i}\, X_i(x(t)) = 0,$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, soluţie a lui (1.1), de unde rezultă că ψ este constantă de-a lungul traiectoriilor sistemului (1.1). ∎

Faptul că funcţia Ψ este constantă de-a lungul traiectoriilor sistemului (1.1) se mai scrie sub forma $\Psi(x_1, x_2, ..., x_n) = C$. De aceea se mai spune că integralele prime reprezintă *legi de conservare.*

Exemplul 1. Fie un corp de masă m aflat în cădere liberă sub acţiunea gravitaţiei $F = mg$. Atunci, mişcarea corpului este descrisă de sistemul

$$\begin{cases} h' = v \\ v' = -g, \end{cases}$$

unde v este viteza lui, iar h distanţa faţă de pământ (parametri de stare).

Funcţia de stare $E = mgh + \dfrac{mv^2}{2}$ este constantă de-a lungul traiectoriei, deoarece $E' = mgh' + mvv' = mgv + mv(-g) = 0$. Recunoaştem aici *legea conservării energiei.*

Exemplul 2. Presupunem că un punct material (particulă) de masă m se mişcă în spaţiu sub acţiunea unui câmp de forţe $\vec{F} = -\text{grad}\,V$, cu V funcţie de clasă C^1 (câmpul F se mai numeşte *conservativ* iar V este un *potenţial scalar*

al mişcării). Dacă $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ sunt coordonatele punctului material la momentul t, atunci, în virtutea *legii lui Newton*, ecuaţia mişcării este $mx'' = -\operatorname{grad} V$ şi pe componente

$$mx_i'' = -\frac{\partial V}{\partial x_i},\ i = 1, 2, 3.$$

Atunci

$$m(x_1'x_1'' + x_2'x_2'' + x_3'x_3'') = -\frac{\partial V}{\partial x_1}x_1' - \frac{\partial V}{\partial x_2}x_2' - \frac{\partial V}{\partial x_3}x_3'$$

adică

$$\frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2) = -\frac{d}{dt}V(x_1(t), x_2(t), x_3(t)).$$

Notând

$$T = \frac{1}{2}m(x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2) = \frac{1}{2}mv^2 \ (\textit{energia cinetică a particulei})$$

atunci

$$\frac{d}{dt}T = -\frac{d}{dt}V,$$

deci $T + V =$ constant. Aşadar, în lungul oricărei curbe integrale, suma $T + V$ este constantă şi este numită *integrală primă a energiei.*

Integrale prime şi integrarea sistemului. Cazul autonom

Vom examina rolul pe care-l au integralele prime la integrarea unui sistem de ecuaţii diferenţiale.

Să presupunem că se cunosc p $(1 \le p \le n)$ integrale prime ale sistemului (1.1) şi anume

$$f_i(x_1, x_2, ..., x_n) = C_i \ (i = 1, 2, ..., p). \tag{1.3}$$

Aceste integrale prime se numesc *independente*, dacă ecuaţiile (1.3) pot fi rezolvate în mod unic în raport cu p dintre variabilele $x_1, x_2, ..., x_n$. Dar pentru ca integralele (1.3) să fie independente este suficient să existe un minor de ordinul p al matricei:

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right),\ i = 1, 2, ..., p;\ j = 1, 2, ..., n$$

care să nu se anuleze în D.

Teorema 1.2. *Dacă pentru sistemul* (1.1) *se cunosc p integrale prime independente, atunci integrarea lui se reduce la integrarea unui sistem normal de $n-p$ ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi.*

Demonstraţie. Presupunând că integralele prime f_i $(i = 1, 2, ..., p)$ sunt independente, ecuaţiile (1.3) se pot rezolva în mod unic în raport cu p dintre variabilele $x_1, x_2, ..., x_n$, de exemplu în raport cu primele p, obţinându-se:

$$x_i = g_i(x_{p+1}, x_{p+2}, ..., x_n, C_1, C_2, ..., C_p),\ \ i = 1, 2, ..., p.$$

Înlocuindu-se apoi în ultimele $n-p$ ecuaţii ale sistemului (1.1) se obţine

$$x'_{p+k} = X_{p+k}(g_1, g_2, ..., g_p, x_{p+1}, ..., x_n),\ \ k = 1, 2, ..., n-p.$$

∎

Teorema 1.2 arată importanţa integralelor prime pentru sisteme diferenţiale.

Să presupunem acum că funcţiile $X_1, X_2, ..., X_n$ nu se anulează simultan în nici un punct din domeniul D. Pentru simplitate, presupunem că $X_1(x_1, x_2, ..., x_n) \neq 0$ pentru orice $(x_1, ..., x_n) \in D$.

Sistemul (1.1) se poate scrie în forma simetrică

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = dt \tag{1.4}$$

şi integrarea lui revine la integrarea sistemului de $(n-1)$ ecuaţii diferenţiale:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{X_2}{X_1}, \frac{dx_3}{dx_1} = \frac{X_3}{X_1}, \ldots, \frac{dx_n}{dx_1} = \frac{X_n}{X_1}, \tag{1.5}$$

urmată de o cuadratură.

Într-adevăr, integrând sistemul (1.5), se găseşte

$$x_2 = g_2(x_1, C_1, C_2, .., C_{n-1}), ..., x_n = g_n(x_1, C_1, C_2, ..., C_{n-1}).$$

Înlocuind acum în primul raport din (1.4) rezultă

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, g_2, g_3, ..., g_n)} = dt,$$

de unde, printr-o cuadratură ce introduce încă o constantă arbitrară, se obţine t funcţie de x_1.

Rezultă, ţinând cont de Teorema 1.2, că pentru integrarea sistemului (1.5) sunt necesare $(n-1)$ integrale prime independente în D, adică $F_1 = C_1$, $F_2 = C_2, ..., F_{n-1} = C_{n-1}$, astfel încât:

$$\frac{\partial(F_1, F_2, ..., F_{n-1})}{\partial(x_2, x_3, ..., x_{n-1})} \neq 0$$

pentru toate punctele $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D$.

Observaţie. Un sistem neautonom se poate transforma într-un sistem autonom, mărind numărul dimensiunilor cu o unitate.

Într-adevăr, dacă considerăm sistemul

$$x_i' = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n),\ i = 1, 2, ..., n$$

acesta poate fi scris sub forma:

$$\frac{dx_1}{f_1(t, x_1, ..., x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(t, x_1, ..., x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n(t, x_1, ..., x_n)} = \frac{dt}{1}.$$

Combinaţii integrabile

Dacă se pot determina n funcţii, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ continue în D, astfel încât în D să fie verificată identic egalitatea

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_n X_n = 0$$

iar expresia $\lambda_1 dx_1 + \lambda_2 dx_1 + \cdots + \lambda_n dx_n$ să fie o diferenţială totală exactă, adică să existe o funcţie $\Psi \in C^1(D)$ astfel încât:

$$\lambda_1 dx_1 + \lambda_2 dx_2 + \cdots + \lambda_n dx_n = d\Psi,$$

atunci spunem că expresia $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_n X_n$ este o combinaţie integrabilă a sistemului (1.5).

În aceste condiţii, se vede imediat că Ψ este o integrală primă a sistemului (1.5). Acest procedeu simplu permite uneori găsirea de integrale prime ale unui sistem de ecuaţii diferenţiale.

5.2 Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi liniare

O relaţie de forma

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}, z\right) = 0,$$

unde $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n,\ z \in C^1(D)$, poartă denumirea de ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi. Aici, funcţia necunoscută este z, de argumente $(x_1, x_2, ..., x_n) \in D$. Spunem că $z : D \to R$ este soluţie a ecuaţiei de mai sus dacă este continuă şi cu derivate parţiale continue în D şi satisface relaţia dată peste tot în D. Dacă F este de gradul întâi în z şi derivatele lui z, spunem că ecuaţia este liniară. Dacă F este liniară numai în derivatele lui z, dar nu şi în funcţia necunoscută z, spunem că ecuaţia este cvasiliniară.

Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi liniare şi omogene

Ecuaţiile de acest tip au forma

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial z}{\partial x_i} = 0 \tag{2.1}$$

unde X_i, $i = 1, 2, ..., n$, sunt funcţii de clasă C^1 în mulţimea D. Presupunem că funcţiile X_i nu se anulează simultan în D.

Din Teorema 1.1, aplicată sistemului autonom scris sub formă simetrică

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n}, \tag{2.2}$$

rezultă că *funcţiile* $z = z(x_1, x_2, ..., x_n)$, $z \in C^1(D)$ *sunt soluţii ale ecuaţiei* (2.1)*, dacă şi numai dacă sunt integrale prime ale sistemului* (2.2). Sistemul (2.2) poartă denumirea de *sistemul caracteristic al ecuaţiei cu derivate parţiale* (2.1).

Presupunem că se cunosc $(n-1)$ integrale prime ale sistemului (2.2)

$$F_i(x_1, x_2, ..., x_n) = C_i, \ \ i = 1, 2, ..., n-1 \tag{2.3}$$

astfel încât determinantul lor funcţional în raport cu $(n-1)$ din cele n variabile să nu se anuleze în nici un punct din D, de exemplu să avem în D:

$$\frac{\partial(F_1, F_2, ..., F_{n-1})}{\partial(x_2, x_3, ..., x_n)} \neq 0. \tag{2.4}$$

Teorema care urmează prezintă structura soluţiei generale a ecuaţiei (2.1).

Teorema 2.1. *Dacă* $F_1, F_2, ..., F_{n-1}$ *sunt* $(n-1)$ *integrale prime independente ale sistemului caracteristic* (2.2)*, iar* ϕ *este o funcţie arbitrară de* $(n-1)$ *variabile, de clasă* C^1 *în raport cu acestea, atunci:*

$$z = \phi(F_1, F_2, ..., F_{n-1}) \tag{2.5}$$

este o soluţie a ecuaţiei (2.1)*, şi orice soluţie a ecuaţiei* (2.1) *are forma* (2.5).

Demonstraţie. Deoarece ϕ şi F_i, $i = \overline{1, n-1}$, sunt funcţii de clasă C^1, rezultă că $\phi(F_1, F_2, ..., F_{n-1})$ este de clasă C^1, în raport cu variabilele $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Acum, deoarece de-a lungul unei soluţii arbitrare a sistemului (2.2) avem $F_i = C_i$, şi deci $\phi(C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = const.$, adică ϕ este o integrală primă a sistemului (2.2), rezultă că ϕ este soluţie a ecuaţiei (2.1).

Reciproc, să presupunem că $z = z(x_1, x_2, ..., x_n)$ este o soluţie a ecuaţiei (2.1) şi să arătăm că are forma (2.5).

Deoarece $F_1, F_2, ..., F_{n-1}$ sunt şi ele soluţii ale ecuaţiei (2.1) rezultă că în D este verificat sistemul:

$$\begin{array}{llllllll} & X_1\dfrac{\partial z}{\partial x_1} & + & X_2\dfrac{\partial z}{\partial x_2} & +\cdots+ & X_n\dfrac{\partial z}{\partial x_n} & = & 0 \\ & X_1\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & + & X_2\dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} & +\cdots+ & X_n\dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} & = & 0 \\ (2.6) & \vdots & & & & & & \\ & X_1\dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial x_1} & + & X_2\dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial x_2} & +\cdots+ & X_n\dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial x_n} & = & 0. \end{array}$$

Interpretăm sistemul (2.6) ca un sistem algebric liniar şi omogen de n ecuaţii cu n necunoscute, $X_1, X_2, ..., X_n$.

Deoarece pentru fiecare punct $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D$ sistemul (2.6) admite soluţii nebanale (întrucât funcţiile X_i nu se anulează simultan în D), rezultă că determinantul său este identic nul în D, deci:

$$\frac{\partial(z, F_1, F_2, ..., F_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, ..., x_n)} = 0. \tag{2.7}$$

Dacă în D avem $X_1(x_1, ..., x_n) \neq 0$, determinantul funcţional (2.4) este nenul şi din (2.7) rezultă că z este o funcţie de $F_1, F_2, ..., F_{n-1}$, adică (2.5). ■

Problema lui Cauchy pentru ecuaţia omogenă

Presupunând că $X_1(x_1, x_2, ..., x_n) \neq 0$ în D, ecuaţia (2.1) se scrie în forma normală:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = -\left(\frac{X_2}{X_1}\frac{\partial z}{\partial x_2} + \frac{X_3}{X_1}\frac{\partial z}{\partial x_3} + \cdots + \frac{X_n}{X_1}\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)$$

Problema lui Cauchy asociată ecuaţiei (2.1) se enunţă astfel: Să se determine soluţia ecuaţiei (2.1) care pentru $x_1 = x_1^0$ se reduce la o funcţie arbitrară dată $\varphi(x_2, x_3, ..., x_n)$, continuă şi cu derivate parţiale de ordinul întâi continue într-o vecinătate a punctului $(x_2^0, x_3^0, ..., x_n^0)$, unde punctul $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in D$.

Această problemă admite o soluţie unică, ce se obţine astfel: din relaţiile (2.3) scrise pentru $x_1 = x_1^0$, deci:

$$F_i(x_1^0, x_2, ..., x_n) = C_i,\ \ i = 1, 2, ..., n-1$$

se pot scoate $x_2, x_3, ..., x_n$ în funcţie de $C_1, C_2, ..., C_{n-1}$, deoarece este satisfăcută condiţia (2.4).

Introducând acum expresiile găsite pentru $x_2, x_3, ..., x_n$ în funcţia $z = \varphi(x_2, x_3, ..., x_n)$ se obţine z în funcţie de $C_1, C_2, ..., C_{n-1}$, adică o relaţie de forma

$$z = F(C_1, C_2, ..., C_{n-1}).$$

Înlocuind acum pe $C_1, C_2, ..., C_{n-1}$ cu expresiile lor conform cu (2.3), se obţine soluţia căutată a ecuaţiei (2.1):

$$z = F(F_1, F_2, ..., F_{n-1})$$

şi care satisface condiţia Cauchy impusă.

Exemplu. Să se determine soluţia ecuaţiei

$$(x_3 - x_2)\frac{2\partial z}{\partial x_1} + x_3\frac{\partial z}{\partial x_2} + x_2\frac{\partial z}{\partial x_3} = 0,$$

care satisface condiţia $z(0, x_2, x_3) = 3x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3$.

Rezolvare. Sistemul caracteristic asociat este

$$\frac{dx_1}{(x_3 - x_2)^2} = \frac{dx_2}{x_3} = \frac{dx_3}{x_2}$$

şi admite integralele prime:

$$x_2^2 - x_3^2 = C_1,\ 3x_1 + (x_3 - x_2)^2 = C_2. \tag{2.8}$$

Făcând $x_1 = 0$ şi eliminând x_2 şi x_3 între relaţiile:

$$x_2^2 - x_3^2 = C_1,\ (x_2 - x_3)^2 = C_2,\ z = 3x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3$$

se obţine $z = 2C_1 + C_2$. Înlocuind acum pe C_1 şi C_2 din (2.8), rezultă că funcţia $z = 2x_1 + 3x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3$ este soluţia căutată.

5.3 Aplicaţii la fizica plasmei

Noţiunea de *plasmă* este folosită în fizică pentru a desemna un gaz ionizat, cu o densitate suficient de mare astfel că forţele exercitate de particulele gazului, unele asupra altora sunt neglijabile în comparaţie cu forţele exercitate asupra particulelor de un câmp electromagnetic exterior. În laborator, plasma apare când electricitatea este descărcată direct în gaz.

Studiul plasmei este stimulat, între altele, de posibilitatea de a controla reactoarele termonucleare.

Reactoarele termonucleare folosesc gaze la temperaturi foarte înalte, temperaturi la care gazul este complet ionizat, prin urmare este o plasmă.

Problema principală a reactoarelor nucleare este cum să păstreze plasma. Un container nu poate fi folosit, deoarece pereţii săi s-ar vaporiza instantaneu. Practica a arătat că plasma poate fi păstrată într-un câmp magnetic.

Ecuaţia de bază a plasmei este cunoscută sub numele de *ecuaţia lui Boltzmann.*

Vom prezenta în continuare un caz special al acestei ecuaţii care este folosit în problema statică a stratului limită.

În acest caz, ecuaţia are forma

$$mv_1 \frac{\partial f}{\partial x} + e\left(\frac{v_2}{c}\,\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\phi}{dx}\right)\frac{\partial f}{\partial v_1} - e\frac{v_1}{c}\,\frac{d\eta}{dx}\,\frac{\partial f}{\partial v_2} = 0. \tag{2.9}$$

În (2.9), f este funcţia necunoscută de trei variabile independente x, v_1 şi v_2. Funcţiile ϕ şi η sunt date şi depind doar de x, în timp ce m, e, C sunt constante.

Ecuaţia (2.9) este liniară şi omogenă, sistemul caracteristic asociat fiind

$$\frac{dx}{mv_1} = \frac{dv_1}{e\left(\dfrac{v_2}{C}\,\dfrac{d\eta}{dx} - \dfrac{d\phi}{dx}\right)} = \frac{dv_2}{-e\dfrac{v_1}{C}\,\dfrac{d\eta}{dx}}. \tag{2.10}$$

Din primul şi al treilea raport obţinem integrala primă

$$f_1 = mv_2 + \frac{e}{C}\eta(x).$$

Înmulţind numărătorul şi numitorul celui de-al doilea raport cu $2v_1$, celui de-al treilea raport cu $2v_2$ şi adunând numărătorii şi numitorii rapoartelor rezultate, obţinem raportul

$$\frac{d(v_1^2 + v_2^2)}{-2ev_1\dfrac{d\phi}{dx}}$$

care, egalat cu primul raport din (2.10), conduce la cea de-a doua integrală primă

$$f_2 = \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2) + e\phi(x).$$

Evident, f_1 şi f_2 sunt funcţional independente, deci soluţia generală a ecuaţiei (2.9) este dată de

$$f(x, v_1, v_2) = F(mv_2 + \frac{e}{C}\eta(x), \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_2^2) + e\phi(x)), \tag{2.11}$$

unde $F(f_1, f_2)$ este o funcţie arbitrară de două variabile.

În (2.11), f_1 reprezintă energia particulei de masă m, iar f_2 este momentul cinetic.

Perechea de ecuaţii

$$f_1 = C_1,\ \ f_2 = C_2;\ \ \ C_1, C_2 = \text{constante}$$

determină traiectoria particulei.

5.4 Ecuaţii cu derivate parţiale cvasiliniare

Considerăm ecuaţia

$$\begin{aligned} &X_1(x_1, x_2, ..., x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, ..., x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + \\ &+X_n(x_1, x_2, ..., x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_n} = X_{n+1}(x_1, x_2, ..., x_n, z) \end{aligned} \tag{3.1}$$

unde $X_1, X_2, ..., X_{n+1}$ sunt funcţii de $n+1$ argumente, de clasă C^1 în raport cu aceste argumente într-un domeniu D, $(n+1)$-dimensional.

La fel ca în cazul liniar omogen, presupunem că funcţiile X_i, i=$1, 2, ..., n$+1, nu se anulează simultan în D.

Se pune problema determinării tuturor funcţiilor $z = z(x_1, x_2, ..., x_n)$, continue împreună cu derivatele lor parţiale de ordinul întâi, care verifică ecuaţia (3.1). Problema integrării acestei ecuaţii se poate reduce la problema integrării ecuaţiei liniare omogene (2.1) dacă, în loc să determinăm pe z direct, soluţie a ecuaţiei (3.1), căutăm să determinăm o funcţie $u \in C^1(D)$, ce depinde de $(n+1)$ argumente $u(x_1, x_2, ..., x_n, z)$ astfel ca, din relaţia

$$u(x_1, x_2, ..., x_n, z) = 0 \tag{3.2}$$

să putem scoate pe z ce verifică (3.1), adică în D, $\dfrac{\partial u}{\partial z} \neq 0$.

Din (3.2) rezultă relaţiile

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = -\frac{\partial u}{\partial x_k} : \frac{\partial u}{\partial z},\ \ k = 1, 2, ..., n$$

care, înlocuite în (3.1), conduc la:

$$X_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + X_n\frac{\partial u}{\partial x_n} + X_{n+1}\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \tag{3.3}$$

care este o ecuaţie liniară şi omogenă în u pe care o tratăm cu metodele dezvoltate în paragraful anterior. Mai exact, îi asociem sistemul caracteristic

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{X_{n+1}}.$$

Fie n integrale prime ale acestui sistem

$$F_i(x_1, x_2, ..., x_n, z) = C_i, \ \ i = 1, 2, ..., n.$$

Integrala generală a ecuaţiei (3.3) va fi deci

$$u = \phi(F_1, F_2, ..., F_n)$$

iar soluţia z a ecuaţiei (3.1), se deduce ca funcţie implicită din

$$\phi(F_1, F_2, ..., F_n) = 0$$

unde ϕ este o funcţie arbitrară de clasă C^1 în D.

Exemplu. Fie ecuaţia

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = mu \quad (m = \text{const.}).$$

Sistemul caracteristic asociat este

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{du}{mu},$$

din care deducem

$$\frac{y}{x} = C_1, \ \ \frac{z}{x} = C_2, \ \ \frac{u}{x^m} = C_3.$$

Soluţia u se deduce din relaţia

$$\phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \frac{u}{x^m}\right) = 0,$$

care ne dă

$$u = x^m \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right).$$

5.5 Probleme

1. Să se determine integralele prime ale următoarelor sisteme de ecuaţii diferenţiale scrise sub formă simetrică:

(i) $\dfrac{dx}{y+z}=\dfrac{dy}{x+z}=\dfrac{dz}{x+y}$;

(ii) $\dfrac{dx}{x+y^2+z^2}=\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dz}{z}$;

(iii) $\dfrac{dx}{x(y+z)}=\dfrac{dy}{z(z-y)}=\dfrac{dz}{y(y-z)}$;

(iv) $\dfrac{dx}{cy-bz}=\dfrac{dy}{az-cx}=\dfrac{dz}{bx-ay}$; $a,b,c\in\mathbb{R}$;

(v) $\dfrac{dx}{x(y^3-2x^3)}=\dfrac{dy}{y(2y^3-x^3)}=\dfrac{dz}{9z(x^3-y^3)}$.

2. Să se determine soluţia generală a următoarelor ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi liniare şi omogene:

(i) $(x-z)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(y-z)\dfrac{\partial u}{\partial y}+2z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$;

(ii) $\left(1+\sqrt{3z-x-y}\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}+2\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$;

(iii) $(y^m-z^p)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(z^p-x^n)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(x^n-y^m)\dfrac{\partial}{\partial u}z=0$, $m,n,p\in\mathbb{N}^*$.

3. Să se determine soluţiile următoarelorprobleme Cauchy:

(i) $\sqrt{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\sqrt{y}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\sqrt{z}\dfrac{\partial u}{\partial z}=0,\ u(x,y,1)=x-y)$;

(ii) $(1+x^2)\dfrac{\partial u}{\partial x}+xy\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\ u(0,y)=y^2$;

(iii) $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+xy\dfrac{\partial u}{\partial z}=0,\ u(x,y,0)=x^2+y^2$.

4. Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi cvasiliniare:

(i) $y\dfrac{\partial u}{\partial x}+x\dfrac{\partial u}{\partial y}=x-y$;

(ii) $2x\dfrac{\partial u}{\partial x}+(y-x)\dfrac{\partial u}{\partial y}=ye^x$;

(iii) $(xu+y)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(x+uy)\dfrac{\partial u}{\partial y}=1-u^2$;

(iv) $\left(1+\sqrt{u-x-y}\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=2$;

(v) $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+(z+u)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(y+u)\dfrac{\partial u}{\partial z}=y+z$.

Capitolul 6

Funcţii speciale

Folosirea metodelor matematice în fizică, mecanică, astronomie a scos în evidenţă, într-o serie de probleme fundamentale, câteva funcţii, numite funcţii speciale, care au unele proprietăţi asemănătoare cu cele care caracterizează funcţiile transcendente elementare.

O categorie importantă de funcţii speciale rezultă din rezolvarea problemelor la limită pentru ecuaţii cu derivate parţiale liniare de ordinul al doilea, pe domenii cilindrice sau sferice.

După cum vom vedea, o metodă foarte folosită în rezolvarea acestor probleme este metoda separării variabilelor. Procedeul general de rezolvare prin această metodă constă în găsirea unui sistem de coordonate curbilinii ortogonale astfel încât ecuaţia cu derivate parţiale dată, după transformarea ei în noile variabile, să admită separarea variabilelor.

Aplicând metoda separării variabilelor, suntem conduşi la probleme la limită pentru ecuaţii diferenţiale (ordinare) de ordinul al doilea, liniare şi omogene. Problemele la limită pentru aceste ecuaţii determină clase importante de funcţii speciale (funcţii cilindrice, sferice etc.). Iată câteva ecuaţii, a căror rezolvare conduce la funcţii speciale:

- **Ecuaţia lui Bessel**
  $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, unde ν este o constantă;

- **Ecuaţia lui Legendre**
  $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \nu y = 0$, unde ν este o constantă;

- **Ecuaţia lui Hermite**
  $y'' - 2xy' + 2ny = 0$, unde $n \in Z$;

- **Ecuaţia lui Cebâşev**
  $(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$, unde $n \in Z$;

- **Ecuaţia hipergeometrică**
  $x(1-x)y''+(c-(a+b+1)x)y'-aby=0$, a,b,c fiind constante.

În cele ce urmează, vom prezenta funcţiile speciale generate de primele două ecuaţii, funcţii cunoscute sub numele de funcţii cilindrice, respectiv funcţii sferice, acestea fiind cele mai frecvent întâlnite în problemele de fizică matematică. Vom studia proprietăţile lor, unele relaţii pe care le satisfac, exprimarea lor prin funcţii elementare, precum şi posibilitatea dezvoltării unei funcţii date în serie de funcţii speciale.

Atât funcţiile cilindrice, cât şi cele sferice apar ca soluţii ale unor ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul II, rezolvate prin metoda separării variabilelor. După cum vom vedea, prin această metodă rezolvarea unei ecuaţii cu derivate parţiale (în anumite situaţii privind forma ecuaţiei şi domeniul în care se lucrează) se reduce la rezolvarea a două ecuaţii diferenţiale de ordinul II cu condiţii suplimentare. Aceste ecuaţii diferenţiale cu condiţii la limită fac parte din categoria problemelor cunoscute sub numele de *probleme Sturm–Liouville*.

Deşi problemele Sturm–Liouville sunt interesante prin ele însele, noi vom evidenţia doar acele rezultate pe care le vom folosi în teoria funcţiilor cilindrice şi sferice.

6.1 Rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale liniare cu ajutorul seriilor de puteri

Metoda seriilor de puteri este una din metodele de bază pentru rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale liniare cu coeficienţi variabili. Metoda, după cum arată şi numele, constă în căutarea soluţiei sub forma unei serii de puteri. Noi ne vom ocupa doar de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul al doilea deoarece sunt cele mai importante din punctul de vedere al aplicaţiilor. La început facem o scurtă prezentare a seriilor de puteri, deşi considerăm că sunt cunoscute de la cursul de analiză matematică.

O serie de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \tag{1.1}$$

se numeşte *serie de puteri în jurul punctului* x_0. Numerele $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ se numesc *coeficienţii* seriei. Spunem că seria (1.1) este convergentă în punctul

$x = x_1$, dacă există şi este finită

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n (x_1 - x_0)^n$$

iar limita se va numi suma seriei în punctul x_1. În caz că limita de mai sus nu există sau este infinită, spunem că seria este divergentă în punctul x_1.

Seriile de puteri au o proprietate specială şi anume faptul că mulţimea punctelor în care seria este convergentă formează un interval. Raza acestui interval, în cazul seriei (1.1), este dată de formula

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{1.2}$$

sau

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \tag{1.3}$$

presupunând că limitele (1.2) sau (1.3) există.

Dacă $R = 0$, seria (1.1) converge numai în $x = x_0$. Dacă $R = \infty$, seria (1.1) converge pentru orice x, iar dacă $0 < R < \infty$, seria converge în intervalul $|x - x_0| < R$ şi diverge pentru $|x - x_0| > R$.

Intervalul $(-R + x_0, R + x_0)$ se numeşte *interval de convergenţă* al seriei (1.1), iar R se numeşte *rază de convergenţă*. În capetele intervalului, $x = -R + x_0$ respectiv $x = R + x_0$, seria poate fi convergentă sau divergentă. Deci, pentru orice x, $|x - x_0| < R$, suma seriei de puteri există şi defineşte o funcţie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \text{ pentru } |x - x_0| < R. \tag{1.4}$$

Funcţia f astfel definită este derivabilă de orice ordin, derivatele sale $f', f'', \ldots$ obţinându-se prin derivarea seriei (1.4) termen cu termen.

În procesul căutării soluţiei unei ecuaţii diferenţiale sub forma unei serii de puteri, avem nevoie, pe lângă derivare, de adunări, scăderi, înmulţiri a două sau mai multe serii de puteri. Aceste operaţii sunt foarte asemănătoare cu cele făcute cu polinoame cu restricţia că, în cazul seriilor, operaţiile se fac pe intersecţia mulţimilor de convergenţă ale seriilor implicate. Să introducem acum conceptul de *funcţie analitică* care va fi folosit în cele ce urmează.

Spunem că funcţia f este *analitică* în punctul x_0 dacă poate fi scrisă sub forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{1.5}$$

seria având o rază de convergenţă pozitivă.

Din (1.5) găsim $f^{(n)}(x_0) = n!a_n$ pentru $n = 0, 1, 2, ...$, deci seria (1.5) este seria Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{1.6}$$

a funcţiei f în punctul $x = x_0$. Astfel, o funcţie f este analitică în punctul x_0, dacă este dezvoltabilă în serie Taylor în punctul x_0 şi are o rază de convergenţă pozitivă.

Puncte ordinare şi puncte singulare

Să considerăm ecuaţia diferenţială liniară de ordinul al doilea cu coeficienţi variabili

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \tag{1.7}$$

Definiţia 1.1. Punctul x_0 se numeşte *punct ordinar* pentru ecuaţia (1.7) dacă funcţiile

$$\frac{a_1(x)}{a_2(x)} \quad \text{şi} \quad \frac{a_0(x)}{a_2(x)} \tag{1.8}$$

sunt analitice în punctul x_0. Dacă cel puţin o funcţie din (1.8) nu este analitică în x_0, atunci x_0 se numeşte *punct singular* pentru ecuaţia (1.7).

Definiţia 1.2. Punctul x_0 se numeşte *punct regulat singular* pentru ecuaţia (1.7) dacă este punct singular şi funcţiile

$$(x - x_0)\frac{a_1(x)}{a_2(x)} \quad \text{şi} \quad (x - x_0)^2\frac{a_0(x)}{a_2(x)} \tag{1.9}$$

sunt analitice în punctul x_0.

Să considerăm acum ecuaţia (1.7) cu condiţiile iniţiale

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1. \tag{1.10}$$

Teorema următoare descrie forma soluţiei pentru ecuaţia (1.7) şi în particular a soluţiei unice pentru ecuaţia (1.7) cu condiţiile iniţiale (1.10), în cazul în care x_0 este un punct ordinar.

Teorema 1.1. *Dacă x_0 este un punct ordinar al ecuaţiei diferenţiale* (1.7)*, atunci soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este dată de seria de puteri*

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{1.11}$$

cu raza de convergenţă pozitivă. Mai exact, dacă R_1 şi R_2 sunt razele de convergenţă ale seriilor reprezentând dezvoltările funcţiilor (1.8)*, atunci raza de convergenţă a seriei* (1.11) *este mai mare sau egală cu minimul dintre R_1 şi R_2. Coeficienţii a_n pentru $n = 2, 3, ...$ ai seriei* (1.11) *se obţin în funcţie de a_0 şi a_1 prin substituţia lui y dat de* (1.11) *în ecuaţia* (1.7) *şi egalarea coeficienţilor puterilor egale ale lui x. În final, dacă y dat de* (1.11) *este soluţia ecuaţiei* (1.7) *cu condiţia Cauchy* (1.10)*, atunci $a_0 = y_0$ şi $a_1 = y_1$.*

Exemplu. Să se rezolve problema Cauchy

$$(1 - x)y'' - y' + xy = 0 \tag{1.12}$$

$$y(0) = y'(0) = 1. \tag{1.13}$$

Soluţie. Deoarece condiţiile iniţiale sunt date în 0, vom căuta soluţia ca o serie de puteri centrată în 0. Ecuaţia (1.12) are un singur punct singular $x = 1$ în timp ce $x_0 = 0$ este punct ordinar.

Deci problema Cauchy (1.12)–(1.13) are o soluţie unică de forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{1.14}$$

Dezvoltând în serie de puteri $a_1(x)/a_2(x)$ şi $a_0(x)/a_2(x)$ obţinem

$$\frac{a_1(x)}{a_2(x)} = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad |x| < 1$$

$$\frac{a_0(x)}{a_2(x)} = \frac{x}{1-x} = x\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}, \quad |x| < 1,$$

de unde rezultă că raza de convergenţă a seriei (1.14), este mai mare sau egală cu 1.

Substituind (1.14) în (1.12) şi egalând coeficienţii găsim

$$2a_2 - a_1 = 0$$

şi

$$a_{n+1} = \frac{n^2 a_n - a_{n-2}}{n(n+1)},\ n = 2, 3....,$$

şi ţinând cont de (1.13), $a_0 = a_1 = 1$. Aceste relaţii implică $a_n = \dfrac{1}{n!}$ pentru $n \geq 1$, deci unica soluţie a problemei (12)–(13) este

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x.$$

Să analizăm în continuare cazul punctelor regulate singulare. Mai exact, ne ocupăm de ecuaţia (1.7)

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

pentru care căutăm soluţii sub forma seriilor de puteri într-o mulţime de forma

$$\{x/0 < |x - x_0| < R\},$$

adică într-un interval din care am scos centrul x_0, despre care presupunem că este punct singular regulat.

Reamintim că, deoarece x_0 este punct singular regulat, au loc dezvoltările în serii de puteri

$$(x - x_0)\frac{a_1(x)}{a_2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x - x_0)^n, \text{ pentru } |x - x_0| < R_1 \tag{1.15}$$

$$(x - x_0)^2 \frac{a_0(x)}{a_2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (x - x_0)^n, \text{ pentru } |x - x_0| < R_2. \tag{1.16}$$

Deoarece x_0 este un punct singular pentru ecuaţia diferenţială (1.7), soluţia sa , în general, nu este definită în x_0. Totuşi, ecuaţia (1.7) are două soluţii liniar independente în mulţimea $0 < |x - x_0| < R$, unde $R = \min\{R_1, R_2\}$.

În continuare, vom enunţa o teoremă care descrie forma celor două soluţii liniar independente ale ecuaţiei (1.7), în vecinătatea unui punct singular regulat.

Definiţia 1.3. Presupunem că x_0 este un punct singular regulat pentru ecuaţia (1.7) şi că au loc dezvoltările (1.15) şi (1.16). Atunci ecuaţia

$$\lambda^2 + (A_0 + 1)\lambda + B_0 = 0 \tag{1.17}$$

se numeşte *ecuaţie indicială* a ecuaţiei diferenţiale (1.7) în jurul punctului x_0.

Teorema 1.2. *Presupunem că* x_0 *este un punct singular regulat pentru* (1.7) *şi că au loc dezvoltările* (1.15) *şi* (1.16)*. Fie* λ_1 *şi* λ_2 *cele două rădăcini ale ecuaţiei indiciale* (1.17) *indexate aşa încât* $\lambda_1 \geq \lambda_2$ *în cazul în care ambele sunt reale. Atunci una din soluţiile ecuaţiei* (1.7) *este de forma*

$$y_1(x) = |x - x_0|^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{1.18}$$

unde $a_0 = 1$*, relaţia* (1.18) *având loc în mulţimea* $\{x/0 < |x - x_0| < R\}$ *unde* $R = \min\{R_1, R_2\}$.

A doua soluţie liniar independentă, $y_2(x)$*, a ecuaţiei* (1.7) *în mulţimea* $\{x/0 < |x - x_0| < R\}$ *se determină în felul următor:*

Cazul 1. *Dacă* $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$ *atunci*

$$y_2(x) = |x - x_0|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \tag{1.19}$$

cu $b_0 = 1$.

Cazul 2. *Dacă* $\lambda_1 = \lambda_2$*, atunci*

$$y_2(x) = y_1(x) \ln |x - x_0| + |x - x_0|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \tag{1.20}$$

cu $b_0 = 0$.

Cazul 3. *Dacă* $\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{N}$*, atunci*

$$y_2(x) = C y_1(x) \ln |x - x_0| + |x - x_0|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \tag{1.21}$$

cu $b_0 = 1$.

Ca şi în cazul punctelor ordinare, coeficienţii seriilor (1.19)–(1.21) se pot obţine substituind soluţia de forma respectivă în ecuaţia (1.7) şi identificând apoi coeficienţii. Seriile de forma (1.19) se numesc *serii Frobenius* iar metoda de determinare a soluţiei utilizând o astfel de serie se numeşte *metoda lui Frobenius* (după numele matematicianului F.Frobenius, 1849-1917).

Vom folosi această metodă la rezolvarea ecuaţiei lui Bessel.

6.2 Polinoame ortogonale

Spunem că sistemul de funcţii $f_1, f_2, ..., f_n, ...$ este ortogonal în intervalul (a, b) în raport cu ponderea ρ dacă are loc egalitatea

$$\int_a^b \rho(x) f_m(x) f_n(x) dx = 0, \ \forall\, m, n \in \mathbb{N}^*, m \neq n$$

ρ fiind o funcţie pozitivă dată.

Un exemplu simplu de sistem ortogonal îl constituie sistemul funcţiilor trigonometrice $f_n(x) = \sin nx$, $n \in \mathbb{N}^*$, care este ortogonal în intervalul $(-\pi, \pi)$, cu ponderea $\rho = 1$.

Sistemele de funcţii ortogonale joacă un rol important în analiză, mai ales în legătură cu posibilitatea dezvoltării unor funcţii arbitrare, aparţinând unor clase funcţionale foarte largi, în serii de funcţii ortogonale.

O clasă importantă de sisteme ortogonale de funcţiio constituie polinoamele ortogonale Legendre, Hermite, Cebâşev etc., care apar ca soluţii ale unor ecuaţii diferenţiale, foarte utilizate în fizica matematică.

Date funcţiile $f, g : [a, b] \to R$, continue, vom defini produsul lor scalar numărul (f, g) dat de relaţia

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

De asemenea, definim norma funcţiei f, numărul real nenegativ $\|f\|$, dat de

$$\|f\| = (f, f)^{1/2} = \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

De aici, rezultă că şirul de funcţii $f_1, f_2, ..., f_n, ...$, definite şi continue pe $[a, b]$, este ortogonal dacă

$$(f_i, f_j) = 0 \text{ pentru } \forall\, i, j \in \mathbb{N}^*, i \neq j.$$

Dacă, în plus, $\|f_n\| = 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, vom spune că şirul este ortonormat.

Se observă uşor că din şirul ortogonal de funcţii continue, nenule $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, se obţine şirul ortonormat $\left(\dfrac{f_n}{\|f_n\|} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Un exemplu de şir de funcţii ortogonale pe intervalul $[0, 2\pi]$ este

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ..., \cos nx, \sin nx, ..., \tag{2.1}$$

din care putem obţine şirul ortonormat

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

Fiind dată funcţia f, ştim că în cazul în care satisface condiţiile lui Dirichlet, o putem dezvolta în serie Fourier, după funcţiile şirului (2.1)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{2.2}$$

unde coeficienţii a_n şi b_n sunt daţi de formulele

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx, & n \in \mathbb{N} \\ b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx, & n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

6.3 Problema Sturm–Liouville

Aplicarea metodei separării variabilelor la ecuaţiile cu derivate parţiale de ordinul al doilea ce intervin în fizica matematică conduce la ecuaţii diferenţiale liniare ordinare de ordinul al doilea de tipul

$$(p(x)y')' + (q(x) + \lambda)y = 0, \tag{3.1}$$

care conţin parametrul λ.

Sturm şi Liouville (J.F. Sturm, 1803–1855 şi J. Liouville, 1809–1882) au elaborat o teorie a ecuaţiilor de tipul (3.1) prin care se arată că soluţiile particulare ale ecuaţiei (3.1) pe un interval $[a, b]$, satisfăcând condiţii prescrise în capetele a şi b, formează un sistem ortogonal care permite, la fel ca în cazul seriilor Fourier, dezvoltarea în serie a unei funcţii în raport cu aceste soluţii.

Condiţiile la capătul intervalului $[a, b]$ sunt de forma

$$\begin{cases} k_1 y(a) + k_2 y'(a) = 0 & (a) \\ \ell_1 y(b) + \ell_2 y'(b) = 0 & (b) \end{cases} \tag{3.2}$$

unde $k_1, k_2, \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$, $\ell_1^2 + \ell_2^2 \neq 0$.

Problema formată din ecuaţia (3.1) împreună cu condiţiile (3.2) este cunoscută sub numele de problema (sau sistem) Sturm–Liouville. Evident, $y \equiv 0$ este întotdeauna soluţie a sistemului (3.1)–(3.2), dar pe noi ne interesează dacă există soluţii nebanale ale acestui sistem.

Soluţiile nebanale ale sistemului (3.1)–(3.2) se numesc *funcţii proprii* (sau *autofuncţii*) ale sistemului Sturm–Liouville. Valorile parametrului λ din ecuaţia (3.1) pentru care obţinem ca soluţii funcţiile proprii se numesc *valori proprii* (sau *autovalori*).

Presupunem că funcţiile p şi q sunt continue în $[a, b]$, iar funcţia p este în plus pozitivă în $[a, b]$.

Formulăm câteva proprietăţi ale funcţiilor proprii şi ale valorilor proprii.

Teorema 3.1. *Există o mulţime infinită de valori proprii,* $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots$ *cărora le corespund funcţiile proprii* $y_1, y_2, ..., y_n, ...$

Demonstraţia, fiind complicată (vezi [8]), o omitem.

Teorema 3.2. *Dacă* p, p', q *sunt continue şi cu valori reale pe* $[a, b]$ *atunci toate valorile proprii ale problemei Sturm–Liouville* (3.1)–(3.2) *sunt reale.*

Demonstraţie. Fie $\lambda = \alpha + i\beta$ o valoare proprie iar $y(x) = u(x) + iv(x)$ funcţia proprie corespunzătoare; $\alpha, \beta, u(x), v(x)$ fiind reale. Introducând y în (3.1) obţinem sistemul

$$\begin{aligned} &(pu')' + (q + \alpha)u - \beta v = 0 \\ &(pv')' + (q + \alpha)v + \beta u = 0. \end{aligned}$$

Înmulţind prima ecuaţie cu v, a doua cu $-u$ şi adunând, obţinem

$$-\beta(u^2 + v^2) = u(pv')' - v(pu')' = [(pv')u - (pu')v]'.$$

Integrând ultima relaţie în intervalul $[a, b]$, obţinem

$$-\beta \int_a^b (u^2 + v^2)dx = [p(uv' - u'v)]_a^b.$$

Datorită condiţiilor la limită, membrul drept este nul şi, deoarece $u^2+v^2 \not\equiv 0$ (y fiind funcţie proprie nebanală), rezultă că $\beta = 0$ ceea ce termină demonstraţia. ∎

Observaţia 3.1. Se poate arăta că dacă în plus $q(x) < 0$ în $[a, b]$, atunci toate valorile proprii sunt nenegative.

Observaţia 3.2. Faptul că valorile proprii sunt reale era de aşteptat deoarece, în probleme concrete, ele desemnează frecvenţe, energii sau alte cantităţi fizice.

Teorema 3.3. (Ortogonalitatea funcţiilor proprii) *Presupunem că* p, p' *şi* q *sunt funcţii reale şi continue în intervalul* $[a, b]$. *Atunci funcţiile proprii* y_m *şi*

y_n ale problemei Sturm–Liouville (3.1)–(3.2) *corespunzătoare valorilor proprii diferite λ_m şi λ_n sunt ortogonale în intervalul $[a, b]$.*

Dacă $p(a) = 0$, atunci condiţia (3.2a) poate lipsi din problemă.

Dacă $p(b) = 0$, condiţia (3.2b) poate lipsi din problemă.

În aceste cazuri se cere ca y şi y' să fie mărginite în punctele respective, iar problema se numeşte singulară.

Dacă $p(a) = p(b)$, atunci condiţia (3.2) *poate fi înlocuită cu*

$$y(a) = y(b),\ y'(a) = y'(b). \tag{3.3}$$

Demonstraţie. Din ipoteză y_m şi y_n satisfac ecuaţiile

$$\begin{aligned}&(py_m')' + (q + \lambda_m)y_m = 0 \quad \text{şi}\\ &(py_n')' + (q + \lambda_n)y_n = 0.\end{aligned}$$

Înmulţim prima ecuaţie cu y_n, pe a doua cu $-y_m$, le adunăm şi obţinem

$$(\lambda_m - \lambda_n)y_m y_n = y_m(py_n')' - y_n(py_m')' = [p(y_n' y_m - y_m' y_n)]'.$$

Ultima expresie este o funcţie continuă deoarece p şi p' sunt continue iar y_m, y_n sunt soluţii ale ecuaţiei (3.1). Integrând pe intervalul $[a, b]$ se obţine egalitatea

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b y_m y_n dx = [p(y_n' y_m - y_m' y_n)]_a^b. \tag{3.4}$$

Expresia din membrul drept al egalităţii (3.4) este

$$p(b)[y_n'(b)y_m(b) - y_m'(b)y_n(b)] - p(a)[y_n'(a)y_m(a) - y_m'(a)y_n(a)]. \tag{3.5}$$

Acum vom analiza cantitatea (3.5), după cum p se anulează sau nu în a şi b.

Cazul 1. Dacă $p(a) = p(b) = 0$, atunci expresia (3.5) este nulă, deci membrul stâng în (3.4) este nul şi cum $\lambda_m \neq \lambda_n$ rezultă

$$\int_a^b y_m(x)y_n(x)dx = 0,\ (m \neq n). \tag{3.6}$$

deci y_n, y_m sunt ortogonale. Observăm că în acest caz nu am folosit condiţiile (3.2).

Cazul 2. Fie $p(b) = 0$, dar $p(a) \neq 0$. Atunci prima cantitate din (3.5) este nulă. Să analizăm a doua cantitate din (3.5). Din (3.2a) rezultă

$$\begin{aligned}&k_1 y_n(a) + k_2 y_n'(a) = 0\\ &k_1 y_m(a) + k_2 y_m'(a) = 0.\end{aligned}$$

Presupunem $k_2 \neq 0$. Înmulţim prima ecuaţie cu $y_m(a)$, a doua cu $-y_n(a)$, le adunăm şi obţinem

$$k_2[y_n'(a)y_m(a) - y_m'(a)y_n(a)] = 0.$$

Deoarece $k_2 \neq 0$, rezultă că expresia din paranteză este nulă, deci cea de a doua cantitate din (3.5) este nulă. Deci, cantitatea (3.5) este nulă iar împreună cu (3.4) determină (3.6), adică ortogonalitatea.

Dacă $k_2 \neq 0$, atunci din ipoteză, $k_1 \neq 0$ şi demonstraţia rezultă folosind un argument similar.

Cazul 3. Dacă $p(a) \neq 0$, dar $p(b) = 0$, demonstraţia funcţionează ca în cazul 2, dar în loc de (3.2a) vom folosi (3.2b).

Cazul 4. Dacă $p(a) \neq 0$ şi $p(b) \neq 0$, vom folosi condiţiile la limită (3.2) şi procedăm ca în cazurile 2 şi 3.

Cazul 5. Dacă $p(a) = p(b)$, expresia (3.5) capătă forma

$$p(b)[y_n'(b)y_m(b) - y_m'(b)y_n(b) - y_n'(a)y_m(a) + y_m'(a)y_n(a)].$$

Putem folosi condiţiile la limită (3.2) ca mai sus pentru a obţine că expresia din paranteză este nulă.

Totuşi, se vede imediat că aceasta rezultă din (3.3), astfel că putem înlocui (3.2) cu (3.3). Deci, (3.4) implică (3.6). Cu aceasta, demonstraţia teoremei este încheiată. ■

În final, dăm fără demonstraţie următorul rezultat de dezvoltare în serie după funcţiile proprii ale problemei Sturm–Liouville.

Teorema 3.4. *Dacă $f \in C^2[a,b]$ şi $f(a) = f(b) = 0$, atunci funcţia f se poate dezvolta într-o serie absolut şi uniform convergentă în intervalul $[a,b]$ după funcţiile proprii y_n*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n y_n(x) \ \text{unde}\ C_n = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)y_n(x)dx}{\displaystyle\int_a^b y_n^2(x)dx}.$$

6.4 Funcţii cilindrice

Numim *funcţii cilindrice* soluţiile ecuaţiei diferenţiale de ordinul II

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{4.1}$$

unde ν este un parametru care poate lua valori reale sau complexe. Termenul de funcţii cilindrice se datoreşte faptului că ecuaţia (4.1) intervine în studiul problemelor la limită ale teoriei potenţialului pentru un domeniu cilindric.

Fie ecuaţia

$$\Delta u = \frac{1}{a^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b\,\frac{\partial u}{\partial t} + cu \tag{4.2}$$

unde Δ este operatorul lui Laplace, t – timpul, iar a ($\neq 0$), b, c constante date.

Ecuaţia (4.2) are drept cazuri particulare ecuaţiile diferenţiale din teoria oscilaţiilor elastice, ale electrodinamicii, ale teoriei propagării căldurii etc.

În cazul în care în locul coordonatelor rectangulare (x, y, z) folosim coordonatele cilindrice (r, z, φ) legate prin relaţiile

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ z = z$$
$$(0 \le r < \infty,\ -\pi < \varphi \le \pi,\ -\infty < z < \infty)$$

ecuaţia (4.2) devine

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b\,\frac{\partial u}{\partial t} + cu \tag{4.3}$$

şi admite o infinitate de soluţii sub forma de produse de factori, fiecare depinzând de o singură variabilă

$$u = R(r)Z(z)\Phi(\varphi)T(t). \tag{4.4}$$

Substituind relaţia (4.4) în (4.3) şi împărţind cu $RZ\Phi T$, obţinem

$$\frac{1}{Rr}\,\frac{d}{dr}(rR') + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{Z''}{Z} - c = \frac{1}{T}\left(\frac{1}{a^2}T'' + bT'\right).$$

Ţinând seama de independenţa variabilelor, ambii membri ai ecuaţiei obţinute trebuie să fie egali cu o anumită constantă pe care o notăm, pentru comoditate, cu $(-\chi^2)$. Avem deci:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a^2}T'' + bT' + \chi^2 T = 0 \\ &\frac{1}{Rr}\,\frac{d}{dr}(rR') + \chi^2 + \frac{1}{a^2}\,\frac{\Phi''}{\Phi} = c - \frac{Z''}{Z}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Din ultima egalitate rezultă că ambii membri sunt egali cu o constantă, pe care o notăm cu $(-\lambda^2)$ şi obţinem:

$$\begin{aligned} & Z'' - (\lambda^2 + c)Z = 0 \\ (4.6) \qquad & r^2\left[\frac{1}{Rr}\ \frac{d}{dr}(rR') + (\lambda^2 + \chi^2)\right] = -\frac{\Phi''}{\Phi}. \end{aligned}$$

Notăm noua constantă cu μ^2 şi obţinem:

$$\Phi'' + \mu^2\Phi = 0 \tag{4.7}$$

$$\frac{1}{r}\ \frac{d}{dr}(rR') + \left(\lambda^2 + \chi^2 - \frac{\mu^2}{r^2}\right)R = 0. \tag{4.8}$$

Aşadar, procesul separării variabilelor conduce la o infinitate de soluţii de forma (4.4), depinzând de trei parametri (χ, λ, μ). Determinarea factorilor din produsul (4.4), revine la integrarea ecuaţiilor diferenţiale ordinare (4.5)–(4.8) dintre care primele trei sunt elementare iar ultima este o ecuaţie de forma (4.1).

Menţionăm două ecuaţii cunoscute care se obţin din ecuaţia (4.2), prin particularizarea coeficienţilor a, b, c.

(I) Ecuaţia lui Laplace $\Delta u = 0$.
Ecuaţia are soluţii particulare de forma

$$u = R(r)Z(z)\Phi(\varphi),$$

unde

$$\frac{1}{r}\ \frac{d}{dr}rR' + \left(\lambda^2 - \frac{\mu^2}{r^2}\right)R = 0$$

$$Z'' - \lambda^2 Z = 0;\ \ \Phi'' + \mu^2\Phi = 0.$$

(II) Ecuaţia lui Helmholtz $\Delta u + k^2 u = 0$
are soluţii de forma

$$u = R(r)Z(z)\Phi(\varphi)$$

unde

$$\frac{1}{r}\ \frac{d}{dr}rR' + \left(\lambda^2 - \frac{\mu^2}{r^2}\right)R = 0$$

$$Z'' - (\lambda^2 - k^2)Z = 0,\ \ \Phi'' + \mu^2\Phi = 0.$$

Clase speciale de funcţii cilindrice sunt cunoscute sub numele de *funcţii Bessel* şi, uneori, această denumire se atribuie întregii clase de funcţii cilindrice.

Ecuaţii Bessel de speţa I

Vom considera ecuaţia Bessel generală

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{4.9}$$

în care ν este parametru real.

Trebuie amintit faptul că ecuaţia (4.9) a fost considerată anterior de L. Euler, dar Bessel a fost cel care a pus în evidenţă proprietăţile soluţiilor. El a ajuns la ecuaţia (4.9) pentru ν număr natural, studiind o problemă legată de mişcarea eliptică.

Vom căuta o soluţie a ecuaţiei (4.9) sub forma unei serii de tipul

$$y(x) = x^\rho \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{4.10}$$

Pentru determinarea lui ρ şi a_n, $n \in \mathbb{N}$, introducem seria (4.10) în ecuaţia (4.9) şi obţinem:

$$\rho(\rho-1)x^\rho \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 2\rho x^{\rho+1} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} +$$
$$+ x^{\rho+2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \rho x^\rho \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x^{\rho+1} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} +$$
$$+ x^{\rho-2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \nu^2 x^\rho \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Egalând cu zero coeficienţii lui $x^\rho, x^{\rho+1}, ..., x^{\rho+n}, ...$, obţinem următorul sistem de ecuaţii pentru determinarea lui ρ şi a coeficienţilor a_n

$$\begin{array}{l} a_0(\rho^2 - \nu^2) = 0 \\ a_1[(\rho+1)^2 - \nu^2] = 0, \\ a_2[(\rho+2)^2 - \nu^2] + a_0 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n[(\rho+n)^2 - \nu^2] + a_{n-2} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Deoarece putem lua $a_0 \neq 0$ (altfel am fi ales drept exponent al lui x pe $\rho+1$), din prima ecuaţie rezultă

$$\begin{array}{l} \rho^2 - \nu^2 = 0 \quad \text{sau} \\ \rho = \pm\nu. \end{array} \tag{4.11}$$

Din a doua ecuaţie rezultă

$$a_1 = 0 \tag{4.12}$$

deoarece (având în vedere (4.11)) avem $a_1(2\rho + 1) = 0$. Apoi, obţinem relaţia de recurenţă

$$a_n - \frac{a_{n-2}}{(\rho+n)^2 - \nu^2} = -\frac{a_{n-2}}{(\rho+n+\nu)(\rho+n-\nu)}, \tag{4.13}$$

relaţie care, împreună cu (4.11) şi (4.12) conduce la:

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= 0, & k \in \mathbb{N} \\ a_{2k} &= -\frac{a_{2k-2}}{(\rho+2k-\nu)(\rho+2k+\nu)}, & k \in \mathbb{N}^*. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Cum pentru ρ am găsit două valori, înseamnă că vom putea determina două soluţii pentru ecuaţia lui Bessel.

A) Să determinăm întâi soluţia corespunzătoare lui $\rho = \nu$. Înlocuind în (4.14) pe ρ cu ν obţinem

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{2^2 k(k+\nu)}.$$

Cum fiecare coeficient de rang par poate fi exprimat în funcţie de cel precedent, aplicarea succesivă a acestei formule ne permite să găsim expresia lui a_{2k} în funcţie de a_0. Vom avea

$$\begin{aligned} a_{2k} &= -\frac{a_{2k-2}}{2^2 k(k+\nu)} = (-1)^2 \frac{a_{2k-4}}{2^{2\cdot 2} k(k-1)(k+\nu)(k+\nu-1)} = \cdots = \\ &= (-1)^k \frac{a_0}{2^k \cdot k!(\nu+1)(\nu+2)...(\nu+k)}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Vom da o formă mai simplă acestor coeficienţi folosind funcţia Γ a lui Euler.

Funcţia Γ se defineşte cu formula

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$$

s putând fi real sau complex, cu $\operatorname{Re} s > 0$.

Indicăm principalele proprietăţi ale acestei funcţii:

a) Funcţia Γ verifică relaţia funcţională

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s),$$

proprietate obţinută prin integrarea prin părţi.

b) $\Gamma(1) = 1$.

c) $\Gamma(n+1) = n!$.

d) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

e) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) = \cdots = s(s-1)(s-2)...(s-p)\Gamma(s-p)$.

Aceste proprietăţi arată că putem considera funcţia Γ ca o generalizare a factorialului, pentru valori reale sau complexe ale argumentului. Cum coeficientul a_0 a rămas nedeterminat, alegem pe a_0 astfel încât să obţinem pentru coeficienţii soluţiei căutate expresii mai simple.

Punând

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$$

şi folosind formula (4.15) obţinem

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k+\nu} k!(\nu+1)(\nu+2)...(\nu+k)\Gamma(\nu+1)}.$$

Deoarece

$$(\nu+1)(\nu+2)...(\nu+k)\Gamma(\nu+1) = \Gamma(\nu+k+1) \text{ şi } k! = \Gamma(k+1),$$

rezultă

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k+\nu}\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}.$$

Înlocuind în seria (4.10), obţinem soluţia corespunzătoare lui $\rho = \nu$ pe care o notăm cu J_ν

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}. \tag{4.16}$$

Această soluţie a ecuaţiei Bessel, care este mărginită pentru $x = 0$, se numeşte *funcţia lui Bessel de speţa I şi de ordinul* ν.

B) Să examinăm acum cazul $\rho = -\nu$ şi $\nu \neq n$ (unde $n > 0$ este un număr întreg).

Reluând calculul în acelaşi mod şi notând

$$a_0 = \frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}$$

obţinem

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k-\nu}\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)}$$

iar soluţia corespunzătoare a ecuaţiei Bessel este

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}.$$

Pentru $\nu \neq n$, se arată că cele două soluţii ale ecuaţiei Bessel sunt liniar independente, deoarece wronskianul celor două funcţii Bessel J_ν şi $J_{-\nu}$ este diferit de zero, deci integrala generală a ecuaţiei este

$$J(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x).$$

Dacă se caută soluţiile mărginite ale ecuaţiei Bessel, atunci $C_2 = 0$.

Funcţiile Bessel cu indice natural

Pentru $\nu = n$ avem

$$J_{-n}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}.$$

Pentru $k = m < n-1$ avem

$$\Gamma(-m) = \frac{\Gamma(-m+1)}{-m} = \cdots = (-1)^m \frac{\Gamma(0)}{m!}\cdot$$

Dar $\Gamma(0) = \left.\dfrac{\Gamma(s+1)}{s}\right|_{s\downarrow 0} = \infty$ deci şi $\Gamma(-m) = (-1)^m \dfrac{\Gamma(0)}{m!} = \infty$ pentru m natural.

Deci în expresia lui J_{-n} sumarea începe de fapt de la $k = n$

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}. \tag{4.17}$$

Propoziţia 4.1. *Dacă $\nu = n$ atunci*

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x). \tag{4.18}$$

Demonstraţie. Dacă în formula (4.17) efectuăm schimbarea $k = n + \ell$, ℓ fiind noul indice de sumare ($0 \leq \ell \leq \infty$) obţinem

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+\ell}}{\Gamma(\ell+n+1)\Gamma(\ell+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\ell+n} = \\ &= (-1)^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell}}{\Gamma(\ell+1)(\Gamma(\ell+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\ell+n}, \end{aligned}$$

deci tocmai

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

∎

Relaţia (4.18) arată că pentru n întreg funcţiile J_n şi J_{-n} sunt liniar dependente.

Cele mai simple şi mai des întâlnite în aplicaţii sunt funcţiile Bessel de ordin întreg J_0 şi J_1. Făcând $\nu = 0$ şi $\nu = 1$ în formula (4.16), obţinem:

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \cdots$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5 + \cdots .$$

Formule de recurenţă

În acest paragraf vom stabili câteva relaţii fundamentale între funcţiile lui Bessel de speţa I de diferite ordine.

Derivând seria de puteri (4.16) după ce am împărţit-o cu x^ν, obţinem

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k\, x^{2k-1}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \frac{1}{2^{2k+\nu}}$$

sau, înlocuind variabila de sumare k prin $k+1$ şi începând sumarea de la $k = 0$, avem

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2(k+1)}{\Gamma(k+2)\Gamma(k+\nu+2)} \frac{x^{2k+1}}{2^{2k+2+\nu}}$$

sau, simplicând şi scoţând în factor pe $\dfrac{1}{x^\nu}$,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = -\frac{1}{x^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+1+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu+1},$$

formulă care comparată cu (4.16) implică

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}. \tag{4.19}$$

Să derivăm acum produsul $x^\nu J_\nu(x)$ în raport cu x:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(x^\nu J_\nu(x)\right) &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)\frac{1}{\Gamma(k+1}\Gamma(k+\nu+1)\ \frac{x^{2k+2\nu}}{2^{2k+\nu}}\right) = \\ &= \sum_{k=0}(-1)^k\frac{2(k+\nu)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\ \frac{x^{2k+2\nu-1}}{2^{2k+\nu}}.\end{aligned}$$

Ţinând cont că $\Gamma(k+\nu+1) = (k+\nu)\Gamma(k+\nu)$ obţinem

$$\frac{d}{dx}\left(x^\nu J_\nu(x)\right) = x^\nu\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+1+\nu-1)}\ \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1}$$

sau, comparând cu (4.16),

$$\frac{d}{dx}\left(x^\nu J_\nu(x)\right) = x^\nu J_{\nu-1}(x). \tag{4.20}$$

Formulele (4.19) şi (4.20) sunt formule de recurenţă între două funcţii Bessel de ordin ν şi $\nu+1$. Cum am specificat că funcţiile Bessel de ordin zero şi unu sunt cel mai des întâlnite, vom scrie cele două formule de recurenţă pentru aceste cazuri. Pentru $\nu = 0$, din (4.19) avem

$$J_0'(x) = -J_1(x)$$

iar pentru $\nu = 1$, din (4.20) obţinem

$$(xJ_1(x))' = xJ_0(x).$$

Putem stabili acum formule de recurenţă care să lege trei funcţii Bessel

$$J_\nu,\ J_{\nu+1},\ J_{\nu+2}.$$

Din (4.19) şi (4.20) obţinem

$$\frac{\nu J_\nu(x)}{x} - J_\nu'(x) = J_{\nu+1}(x)$$

$$\frac{\nu J_\nu(x)}{x} + J_\nu'(x) = J_{\nu-1}(x)$$

relaţii care, prin adunare şi scădere, conduc la

$$
\begin{aligned}
J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) &= \frac{2\nu}{x}\ J_\nu(x) \\
J_{\nu+1}(x) - J_{\nu-1}(x) &= -2J'_\nu(x)
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

formule care, din aproape în aproape, permit calculul tuturor funcţiilor Bessel de ordin întreg dacă se cunosc J_0 şi J_1.

Funcţiile Bessel de ordin semiîntreg

Funcţiile Bessel de ordin $\nu = n + \dfrac{1}{2}$, unde n este un număr întreg, se pot exprima prin funcţii elementare. Să calculăm mai întâi valorile lui $J_{\frac{1}{2}}$ şi $J_{-\frac{1}{2}}$. Avem

$$
J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma\left(\dfrac{3}{2}+n\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2n} \quad \text{şi}
$$

$$
J_{-\frac{1}{2}}(x) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!J\left(\dfrac{1}{2}+n\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2n}.
$$

Folosind proprietăţile funcţiei Γ obţinem

$$
\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right) &= \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}{2^{n+1}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}, \\
\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) &= \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^{n}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^{n}}\sqrt{\pi},
\end{aligned}
$$

care, introduse în expresiile funcţiilor $J_{\frac{1}{2}}$ şi $J_{-\frac{1}{2}}$, dau

$$
\begin{aligned}
J_{\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \\
J_{-\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}.
\end{aligned}
$$

Se observă că ultimele sume reprezintă dezvoltarea în serie a lui $\sin x$ şi $\cos x$. Prin urmare, $J_{\frac{1}{2}}$ şi $J_{-\frac{1}{2}}$ se exprimă prin funcţii elementare

$$
\begin{aligned}
J_{\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \\
J_{-\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.
\end{aligned}
$$

Folosind formula de recurenţă (4.21) putem calcula din aproape în aproape funcţiile lui Bessel de speţa I de ordin $\nu = n + \dfrac{1}{2}$ care rezultă că se exprimă prin funcţii elementare.

Funcţii sferice. Polinoamele lui Legendre

Funcţiile sferice constituie o clasă de funcţii speciale strâns legate de studiul ecuaţiei lui Laplace şi de teoria potenţialului.

Una dintre cele mai importante clase de probleme ale fizicii matematice o constituie problemele la limită ale potenţialului, care constau în determinarea unei funcţii V care să verifice ecuaţia lui Laplace

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

într-un domeniu Ω dat şi care satisface pe frontiera $\partial\Omega$ a lui Ω condiţii impuse. Procedeul general de rezolvare a problemelor la limită constă în găsirea unui sistem de coordonate curbilinii ortogonale, astfel încât suprafaţa $\partial\Omega$ să fie una dintre suprafeţele de coordonate şi ecuaţia lui Laplace, după transformarea ei în noile variabile să admită separarea variabilelor.

În cazul nostru, luând $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$, $0 \leq r < \infty$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, $0 < \theta \leq \pi$, ecuaţia lui Laplace devine

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Căutând o soluţie care este independentă de φ, de forma $r^p\Theta$, unde Θ este o funcţie ce depinde doar de θ, găsim

$$\frac{d\Theta}{d\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,\frac{d\Theta}{d\theta} + p(p+1)\Theta = 0.$$

Făcând schimbarea de variabilă $x = \cos\theta$, $y = \Theta$, obţinem *ecuaţia lui Legendre*

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0. \tag{4.22}$$

Dacă p este un întreg nenegativ, o soluţie în jurul punctului ordinar $x_0 = 0$ este un polinom. Normalizate corespunzător, aceste soluţii polinomiale sunt numite *polinoamele lui Legendre* (A.M.Legendre, 1752-1833).

Să căutăm două soluţii, liniar independente în jurul punctului $x_0 = 0$.

Aici, $a_2(x) = 1 - x^2$, $a_1(x) = -2x$ şi $a_0(x) = p(p+1)$. Deoarece $a_2(0) = 1 \neq 0$, punctul $x_0 = 0$ este un punct ordinar pentru ecuaţia (4.22).

Forma oricărei soluţii a ecuaţiei diferenţiale (4.22) în jurul lui $x_0 = 0$ este

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{4.23}$$

Pentru a determina o margine inferioară pentru raza de convergenţă a soluţiei (4.23) trebuie să calculăm razele de convergenţă ale seriilor Taylor în jurul lui zero ale funcţiilor $a_1(x)/a_2(x)$ şi $a_0(x)/a_2(x)$. Avem:

$$\frac{a_1(x)}{a_2(x)} = -\frac{2x}{1-x^2} = -2x(1 + x^2 + x^4 + \cdots) = \sum_{n=0}^{\infty} -2x^{2n+1},\ |x| < 1$$

şi

$$\frac{a_0(x)}{a_2(x)} = \frac{p(p+1)}{1-x^2} = p(p+1)(1 + x^2 + x^4 + \cdots) = \sum_{n=0}^{\infty} p(p+1)x^{2n},\ |x| < 1.$$

Deci, raza de convergenţă a soluţiei (4.23) este mai mare sau egală cu 1, adică seria (4.23) converge pentru $|x| > 1$. Din (4.23) rezultă:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n,$$

$$-x^2 y'' = \sum_{n=2}^{\infty} -n(n-1) a_n x^n,$$

$$-2xy' = \sum_{n=1}^{\infty} -2n a_n x^n,$$

$$p(p+1)y = \sum_{n=0}^{\infty} p(p+1) a_n x^n.$$

Introducând aceste cantităţi în (4.22) obţinem

$$[2a_2 + p(p+1)a_0] + [6a_3 - 2a_1 + p(p+1)a_1]x +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1)(n+2)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2n a_n + p(p+1)a_n] x^n = 0$$

de unde

$$2a_2 + p(p+1)a_0 = 0,\ 6a_3 - 2a_1 + p(p+1)a_1 = 0$$

şi

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + p(p+1)a_n = 0, \; n = 2, 3, ...,$$

De aici obţinem relaţiile recurente

$$a_2 = -\frac{p(p+1)}{2}a_0, \; a_3 = -\frac{(p-1)(p+2)}{3!}a_1$$

şi

$$a_{n+2} = -\frac{(p-n)(p+n+1)}{(n+2)(n+1)}a_n$$

relaţii care conduc la

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{p(p-2)\cdots(p-2n+2)(p+1)(p+3)\cdots(p+2n-1)}{(2n)!}a_0,$$

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{(p-1)(p-3)\cdots(p-2n+1)(p+2)(p+4)\cdots(p+2n)}{(2n+1)!}a_1,$$

$n = 1, 2, ...$

Deci, două soluţii liniar independente ale ecuaţiei lui Legendre în jurul punctului zero sunt

$$y_1(x)=1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{p(p-2)\cdots(p-2n+2)(p+1)(p+3)\cdots(p+2n-1)}{(2n)!}x^{2n}$$

$$y_2(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(p-1)(p-3)\cdots(p-2n+1)(p+2)(p+4)\cdots(p+2n)}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

După cum se poate observa din formulele de recurenţă de mai sus, când p este un număr întreg nenegativ n, una din soluţiile de mai sus este un polinom de grad n. Un multiplu al acestui polinom care ia valoarea 1 pentru $x = 1$ se numeşte *polinom Legendre* şi se notează cu $P_n(x)$. De exemplu $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$, etc.

Polinoamele lui Legendre pot fi introduse şi cu ajutorul unei formule diferenţiale după cum se vede din teorema care urmează.

Teorema 4.1. (Formula lui Rodrigues) *Polinomul lui Legendre P_n poate fi reprezentat sub forma*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right].$$

Demonstraţie. Notăm $u = (x^2 - 1)^n$ de unde rezultă

$$(x^2 - 1)u' - 2nxu = 0.$$

Derivând această ecuaţie de $(m+1)$ ori, obţinem

$$(x^2 - 1)u^{(m+2)} - (2n - 2m - 2)xu^{(m+1)} + [m(m+1) - 2n(m+1)]u^{(m)} = 0.$$

Înlocuind pe m cu n, rezultă

$$(1 - x^2)u^{(n+2)} - 2xu^{(n+1)} + n(n+1)u^{(n)} = 0,$$

adică funcţia

$$V_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n u}{dx^n}$$

satisface ecuaţia lui Legendre

$$(1 - x^2)V_n''(x) - 2xV_n'(x) + n(n+1)V_n(x) = 0.$$

Rezultă că $V_n(x) = C_n P_n(x)$, unde C_n este o constantă.

Să arătăm că $V_n(1) = 1$. Pentru aceasta, considerăm derivata

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[(x^2 - 1)^n\right] = \frac{d^m}{dx^m}\left[(x+1)^n (x-1)^n\right] =$$

$$= a_0(x+1)^{n-m}(x-1)^n + a_1(x+1)^{n-m+1}(x-1)^{n-1} + \cdots + a_n(x+1)^n(x-1)^{n-m}.$$

Dacă $m < n$, atunci în $x = -1$ şi $x = 1$ toţi termenii se anulează

$$\left\{\frac{d^m}{dx^m}\left[(x^2 - 1)^n\right]\right\}_{x=\pm 1} = 0 \ (m < n).$$

Dacă $m = n$, atunci

$$\left\{\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2 - 1)^n\right]\right\}_{x=\pm 1} = 2^n n!,$$

de unde rezultă $V_n(1) = 1$, deci $C_n = 1$ şi

$$V_n(x) = P_n(x).$$

$\blacksquare$

6.5 Probleme

1. Să se determine autovalorile şi autofuncţiile problemei Sturm–Liouville periodice

$$\text{a)}\quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(-1) = y(1),\ u'(-1) = y'(1), \end{cases}$$

$$\text{b)}\quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2\pi),\ y'(0) = y'(2\pi), \end{cases}$$

$$\text{c)}\quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(\pi),\ y'(0) = y'(\pi). \end{cases}$$

2. Să se verifice relaţiile

(i) $x^2 J_n'' = (n^2 - n - x^2)J_n + xJ_{n+1}$,

(ii) $J_2 = J_0 + 2J_0''$,

(iii) $J_2 = J_0'' - x^{-1}J_0'$,

(iv) $J_3 + 3J_0' + 4J_0'' = 0$.

3. Să se arate că soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$x^2 y'' - 2xy' + 4(x^4 - 1)y = 0$$

este

$$Ax^{\frac{3}{2}} J_{\frac{5}{4}}(x^2) + Bx^{\frac{3}{2}} J_{-\frac{5}{4}}(x^2).$$

4. Să se arate că dacă ecuaţiei $\Delta u + k^2 u = 0$ i se aplică transformarea $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ ea devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + k^2 u = 0$$

şi este satisfăcută de $u = R\theta\Phi$, unde

$$R = r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr), \theta = P_n^m(\cos\theta), \Phi = \sin m\varphi.$$

5. Folosind definiţia funcţiei Bessel, să se verifice că soluţia ecuaţiei

$$y'' - \frac{2n-1}{x} y' + y = 0$$

este

$$y = x^n (AJ_n(x) + BJ_{-n}(x)).$$